

一 般 力 学 I

2025（令和7）年度 1T

日時： 木曜日 5－8時限目（12：50～16：05）

教室： 総合科学部 K103講義室

担当教員：

広島大学 大学院 先進理工系科学研究科 先進理工系科学専攻
輸送・環境システムプログラム

地球流体システム研究室

荒井 正純

居室： 工学部 A2棟 332号室

E-mail: arai@ocean.hiroshima-u.ac.jp

目次

第 0 章 数学的準備	1
0.1 ベクトル	1
0.1.1 はじめに	1
0.1.2 基本ベクトル	1
0.1.3 座標系	2
0.1.4 スカラー積・ベクトル積	2
0.1.5 右手系と左手系	4
0.1.6 軸性ベクトルと極性ベクトル	4
0.1.7 3つのベクトルの積	5
0.1.8 ベクトルの微分	6
0.1.9 ベクトルの線積分	7
0.1.10 合成関数の微分	8
0.1.11 Taylor 級数	9
0.2 常微分方程式	10
0.2.1 一般論	10
0.2.2 1 階常微分方程式	10
0.2.3 2 階常微分方程式	14
付 録 0.A ベクトルの一次独立性	17
付 録 0.B ベクトル積の 3 つの性質から、ベクトル積の成分表示を導出	17
付 録 0.C 定数係数の 2 階常微分方程式の解における解の重ね合わせ	19
付 録 0.D 関数形の 1 次独立性とロンスキー行列式	20
第 1 章 運動学	22
1.1 速度・加速度	22
1.1.1 速度・加速度の定義	22
1.1.2 速度・加速度のデカルト座標系における表式	23
1.2 直交曲線座標系	23
1.3 2 次元極座標系	24
1.3.1 基本ベクトル	24
1.3.2 基本ベクトルの時間微分	25
1.3.3 基本ベクトルの時間微分の意味	25
1.3.4 速度及び加速度の表式	26
1.3.5 用語	27
1.3.6 円運動への適用	27
1.3.7 円運動以外の運動への適用	27
1.3.8 任意のベクトルの成分の変換則	28

1.3.9	速度及び加速度の動径成分・角成分の別の導出法	28
1.4	円筒座標系	30
付 録 1.A	2次元極座標系における任意のベクトルの成分の変換則	31
第 2 章	質点力学	33
2.1	一般法則	33
2.1.1	ニュートンの法則	33
2.1.2	運動方程式	33
2.2	質量と力	34
2.2.1	慣性質量の決め方	34
2.2.2	力	34
2.2.3	慣性質量と重力質量	35
2.3	問題の定式化	35
2.3.1	座標系の選択	35
2.3.2	作用する力の例	36
2.3.3	運動方程式の定式化	37
2.4	運動方程式の解法: 加速度が一定の場合	38
2.5	運動方程式の解法: 加速度が一定でない場合	40
第 3 章	運動量と力積	46
3.1	運動量	46
3.2	力積	46
3.3	撃力	46
3.4	質量が変化する物体の運動方程式の導出	47
3.5	質量が変化する物体の運動の例	48
3.5.1	鎖の運動	48
3.5.2	ロケットの運動	51
3.6	2つの物体からなる系の運動: 系の運動量の保存	53
第 4 章	角運動量と力のモーメント	59
4.1	定式化	59
4.1.1	角運動量方程式	59
4.1.2	角運動量の保存	60
4.1.3	角運動量方程式の不変性	60
4.2	各座標系に関する表式	60
4.2.1	デカルト座標系に関する表式	60
4.2.2	平面運動の場合の表式	61
4.2.3	極座標系に関する表式	61
第 5 章	仕事とエネルギー	63
5.1	1次元の場合	63
5.1.1	運動エネルギー・仕事率	63
5.1.2	仕事	63
5.1.3	ポテンシャルエネルギーと保存力のなす仕事	64

5.1.4	全エネルギーとその保存	64
5.1.5	全エネルギーの保存の応用	65
5.1.6	運動の解法への応用	68
5.1.7	保存力でない力	70
5.1.8	2つの質点の合体の場合	72
5.1.9	質量が変化する運動の場合	72
5.2	3次元の場合	72
5.2.1	仕事とエネルギー	72
5.2.2	保存力とポテンシャルエネルギー	73
5.2.3	全エネルギーとその保存	74
5.3	仕事をしない力	76
第 6 章	束縛運動	77
6.1	2次元極座標系における運動方程式	77
6.2	2次元極座標系におけるエネルギー論	77
6.2.1	2次元極座標系におけるエネルギー方程式	77
6.2.2	2次元極座標系における保存力とポテンシャルエネルギー	77
6.2.3	2次元極座標系における全エネルギーとその保存	78
6.3	円周上に束縛された運動	78
第 7 章	振動論	81
7.1	単振動の例	81
7.1.1	バネ	81
7.1.2	振り子	81
7.2	単振動の解とその性質	82
7.2.1	単振動の解	82
7.2.2	単振動の解の性質	83
7.2.3	解の重ね合わせ	84
7.3	減衰振動	85
7.3.1	運動方程式	85
7.3.2	特性方程式の解	85
7.3.3	抵抗力が作用する振動子の解	85
7.4	抵抗のない強制振動	88
7.4.1	cosine 型の外力における強制振動	89
7.4.2	周期的な強制振動の例	90
7.4.3	周期的な強制振動における特徴的な現象 — 共鳴・うなり	90
7.5	抵抗のある強制振動	93
7.5.1	過渡現象と定常解	93
7.5.2	cosine 型の外力における強制・減衰振動	93
7.5.3	cosine 型の外力における過渡現象と定常振動	96
7.6	振動子のエネルギー論	97
7.6.1	単振動のエネルギー	97
7.6.2	減衰振動子のエネルギー	101

7.6.3 強制・減衰振動子のエネルギー	101
--------------------------------	-----

第0章 数学的準備

力学に限らず，物理学の法則は，数式を用いて表される．本章では，力学で必要となる，ベクトル，常微分方程式に関する数学的知識について説明する．

0.1 ベクトル

0.1.1 はじめに

0.1.1.1 スカラーとベクトル

単に大きさのみを持つ量をスカラーという．例として，長さ，時間，質量，エネルギーがあげられる．

大きさと向きを持つ量をベクトルという．力学の基本的な量である位置ベクトル，速度，加速度，力は，大きさと向きを持つので，ベクトルで表される．この理由から，本授業では最初にベクトルを取り上げる．

0.1.1.2 ベクトルを用いることの利点

我々のいるこの空間の次元は3次元であるが，3次元空間での物体の位置を記述するにはベクトルを用いるのが便利である．成分で表すと3つの式がいるところを，ベクトルで表すと1つの式ですむからである．更に，ベクトルで表しておくで，式の変形にベクトルの諸々の演算を利用することができ，式変形が簡便になると言う利点がある．

0.1.1.3 表記上の注意

本テキストでは，ベクトルを表すのに太字を用いる．例えば， $\mathbf{A}$ のようにである．それに対して，ベクトルの成分やベクトルの大きさ，スカラーは， A のように細字で表す．

0.1.2 基本ベクトル

3次元空間におけるベクトル $\mathbf{A}$ は，1次独立な3つのベクトル $\mathbf{e}_x$, $\mathbf{e}_y$, $\mathbf{e}_z$ を用いて，

$$\mathbf{A} = A_x \mathbf{e}_x + A_y \mathbf{e}_y + A_z \mathbf{e}_z \quad (0.1)$$

の形に一意に表される．この時， $\mathbf{e}_x$, $\mathbf{e}_y$, $\mathbf{e}_z$ を**基本ベクトル**， A_x , A_y , A_z をこの基本ベクトル系での $\mathbf{A}$ の**成分**という．基本ベクトルには，大きさが1で，互いに直交しているもの（正規直交系）を選ぶことにする．

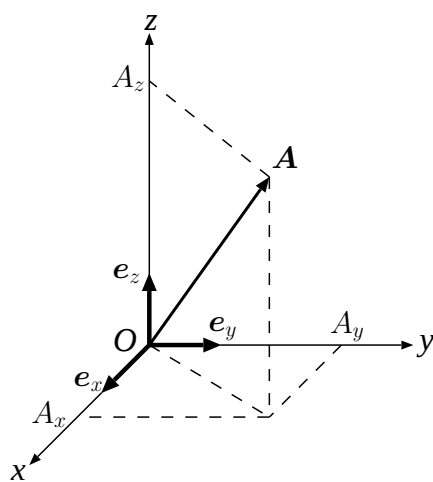


図 0.1: 基本ベクトルと座標系

0.1.3 座標系

基本ベクトルを定めると、座標系も自ずから定まる。座標軸の向きは、基本ベクトルの向きと一致させる。よく使われる座標系として、空間に固定した直交座標系（デカルト座標系）がある。デカルト座標系では、座標軸 x, y, z 方向の単位ベクトル（それぞれ e_x, e_y, e_z ）が基本ベクトルとなる。特にことわらない限り、座標系といえばデカルト座標系をさす。座標系の名前として、原点と座標軸の記号を用いて、 $Oxyz$ 系のように名付ける。

座標系を定めた場合には、ベクトル $\mathbf{A}$ を成分のみの組で、

$$\mathbf{A} = (A_x, A_y, A_z) \quad (0.2)$$

と表すこともある。

後の第 1.2 節では 2 次元極座標系や円筒座標系、「一般力学 II」の「非慣性系における運動」では回転座標系といった、デカルト座標系以外の座標系を扱う。これらの座標系では、座標軸の向き、従って、基本ベクトルは時間的に変化する（基本ベクトルは時間の関数である）。

0.1.4 スカラー積・ベクトル積

2 つのベクトルの積の演算には、スカラー積とベクトル積の 2 種類の演算がある。

2 つのベクトル $\mathbf{A} = (A_x, A_y, A_z)$, $\mathbf{B} = (B_x, B_y, B_z)$ の大きさをそれぞれ A, B , 互いのなす角を θ とする。

$$A = |\mathbf{A}| = \sqrt{A_x^2 + A_y^2 + A_z^2}, \quad B = |\mathbf{B}| = \sqrt{B_x^2 + B_y^2 + B_z^2}.$$

0.1.4.1 スカラー積

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = AB \cos \theta \quad (0.3)$$

を $\mathbf{A}$ と $\mathbf{B}$ のスカラー積（内積）という。特に、正規直交系をなす基本ベクトルの場合、

$$e_x \cdot e_x = e_y \cdot e_y = e_z \cdot e_z = 1, \quad (0.4a)$$

$$e_x \cdot e_y = e_y \cdot e_z = e_z \cdot e_x = 0, \quad (0.4b)$$

であるから、スカラー積は成分を用いて、

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z \quad (0.5)$$

と表される。スカラー積について、交換法則

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = \mathbf{B} \cdot \mathbf{A}$$

が成り立つ。

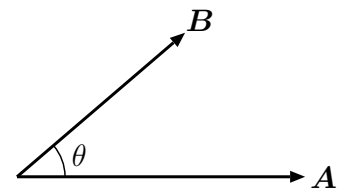


図 0.2: スカラー積

問題

0.1 スカラー積の定義 (0.3) より, 余弦定理,

$$A^2 + B^2 - 2AB \cos \theta = C^2 \quad (0.6)$$

を用いて, 関係式 (0.5) を導出せよ. ここで, A, B, C はそれぞれベクトル $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{A} - \mathbf{B}$ の大きさとする.

0.2 ベクトル $\mathbf{A} = (1, -1, 1)$ と $\mathbf{B} = (2, 3, -1)$ に垂直な単位ベクトルを求めよ. 単位ベクトルとは大きさが 1 のベクトルのことである.

0.1.4.2 ベクトル積

$\mathbf{A}$ と $\mathbf{B}$ が平行でない時, 以下の 3 つの性質を持つベクトルを $\mathbf{A}$ と $\mathbf{B}$ のベクトル積 (外積) と呼び, $\mathbf{A} \times \mathbf{B}$ と表す.

- (i) 大きさは, ベクトル $\mathbf{A}, \mathbf{B}$ を 2 辺とする平行四辺形の面積 $AB \sin \theta$ に等しい.
- (ii) 方向は, この平行四辺形に直交する方向を向く.
- (iii) 向きは, ベクトル $\mathbf{A}$ から $\mathbf{B}$ に右ネジを回した時にネジの進む向きに一致する向きを選ぶ.

性質 (iii) より, ベクトル積について交換法則は成り立たない.

$$\mathbf{A} \times \mathbf{B} = -\mathbf{B} \times \mathbf{A}$$

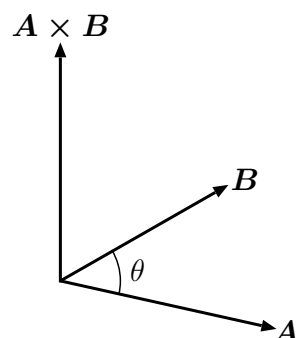


図 0.3: ベクトル積

特に, $\mathbf{A}$ と $\mathbf{B}$ が平行な場合, ベクトル積はゼロベクトル, 即ち, $\mathbf{A} \times \mathbf{B} = \mathbf{0}$ である. $\mathbf{A} = \mathbf{0}$ 又は $\mathbf{B} = \mathbf{0}$ の場合も $\mathbf{A} \times \mathbf{B} = \mathbf{0}$ である.

正規直交系をなす基本ベクトルについては,

$$\mathbf{e}_x \times \mathbf{e}_x = \mathbf{e}_y \times \mathbf{e}_y = \mathbf{e}_z \times \mathbf{e}_z = \mathbf{0}, \quad (0.7a)$$

$$\mathbf{e}_x \times \mathbf{e}_y = \mathbf{e}_z, \quad \mathbf{e}_y \times \mathbf{e}_z = \mathbf{e}_x, \quad \mathbf{e}_z \times \mathbf{e}_x = \mathbf{e}_y, \quad (0.7b)$$

であるから, ベクトル積は, 基本ベクトルを明示した表記では,

$$\mathbf{A} \times \mathbf{B} = (A_y B_z - A_z B_y) \mathbf{e}_x + (A_z B_x - A_x B_z) \mathbf{e}_y + (A_x B_y - A_y B_x) \mathbf{e}_z \quad (0.8)$$

となる. 成分のみの表記では,

$$\mathbf{A} \times \mathbf{B} = (A_y B_z - A_z B_y, A_z B_x - A_x B_z, A_x B_y - A_y B_x) \quad (0.9)$$

と表される.

問題

0.3 問題 0.2 を, ベクトル積を用いて解け.

0.1.4.3 スカラー積・ベクトル積で表される量

m は質量 (スカラー), $\mathbf{r}$ は位置ベクトル, $\mathbf{v}$ は速度 (ベクトル), $\mathbf{F}$ は力 (ベクトル) とする.

スカラー積で表される量として, 運動エネルギー $\frac{1}{2} m \mathbf{v} \cdot \mathbf{v}$, 仕事率 $\mathbf{F} \cdot \mathbf{v}$ がある.

ベクトル積で表される量として, 力のモーメント $\mathbf{r} \times \mathbf{F}$, 角運動量 $m \mathbf{r} \times \mathbf{v}$ がある.

0.1.5 右手系と左手系

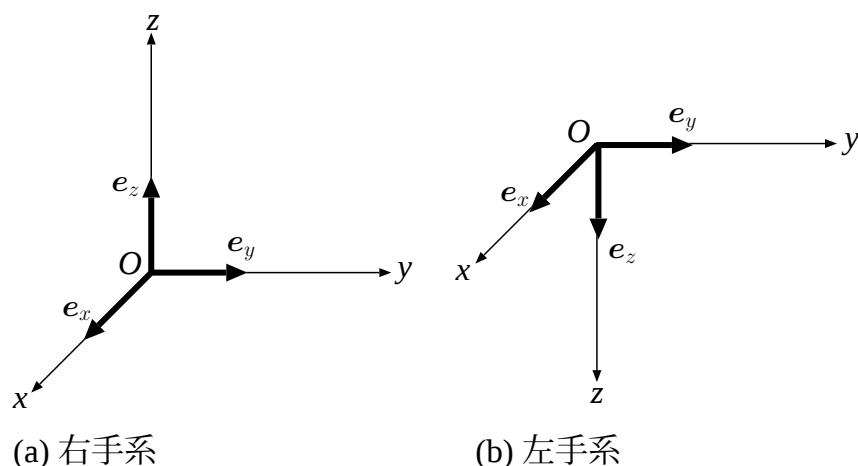


図 0.4. 基本ベクトルと座標系の右手系と左手系.

特に断らなかつたが、座標系の座標軸の向きを定める時、 x 軸、 y 軸、 z 軸の正の向き（基本ベクトル e_x , e_y , e_z の向き）が、右手の親指、人差し指、中指の向きになるように決めた。これを右手系と呼ぶ。ベクトル A と B のベクトル積の定義において、 A から B に右ネジを回した時にネジの進む向きを、ベクトル積 $A \times B$ の向きと定義したこと、基本ベクトルのベクトル積に (0.7b) 式のような関係があることは、右手系を採用したことに対応する。

x 軸、 y 軸、 z 軸の正の向きが、左手の親指、人差し指、中指の向きになるように決めた座標系は、左手系と呼ばれる。左手系を採用した場合、 A から B に左ネジを回した時にネジの進む向きを、ベクトル積 $A \times B$ の向きと定義する。

※ 物理学では（本授業でも）、左手系ではなく右手系を用いるのが約束である。

0.1.6 軸性ベクトルと極性ベクトル

位置ベクトル、速度、加速度、力のように、大きさと向きとして計測が可能なベクトルを、**軸性ベクトル** という。

角運動量や力のモーメントは、軸性ベクトルと軸性ベクトルのベクトル積として、数学的に定義されたベクトルである。その大きさは計測が可能であるが、向きは数学的に定まるもので、向きに計測的な意味はない。このようなベクトルは、**極性ベクトル** 又は **擬ベクトル** と呼ばれる。

問題

0.4 右手系である座標系 $Oxyz$ 系に対して、左手系 $Ox'y'z'$ 系へ移項する座標変換、即ち、鏡像変換、

$$x' = x, \quad (0.10a)$$

$$y' = y, \quad (0.10b)$$

$$z' = -z, \quad (0.10c)$$

を考える. $\mathbf{A}, \mathbf{B}$ の $Oxyz$ 系に関する成分, $(A_x, A_y, A_z), (B_x, B_y, B_z)$ は, この座標変換によって, $(A'_x, A'_y, A'_z), (B'_x, B'_y, B'_z)$ に変換されたとすると,

$$A'_x = A_x, \quad A'_y = A_y, \quad A'_z = -A_z, \quad (0.11a)$$

$$B'_x = B_x, \quad B'_y = B_y, \quad B'_z = -B_z, \quad (0.11b)$$

である. この場合, ベクトル積 $\mathbf{A} \times \mathbf{B}$ の $Oxyz$ 系に関する成分と $Ox'y'z'$ 系に関する成分は, ベクトルであるにもかかわらず, このような変換則には従わない. このことを確かめよ.

※ 軸性ベクトル $\mathbf{A}, \mathbf{B}$ は, 鏡像変換 (0.10) に対して, その成分が同じ形の変換 (0.11) に従う. 一方, ベクトル積 $\mathbf{A} \times \mathbf{B}$ の成分は, このような変換に従わないのは, それが極性ベクトルだからである.

0.1.7 3つのベクトルの積

3つのベクトル $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}$ の間に, スカラー三重積, ベクトル三重積の2種類の演算を考えることができる.

0.1.7.1 スカラー三重積

$\mathbf{A}$ と $\mathbf{B} \times \mathbf{C}$ のスカラー積 $\mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} \times \mathbf{C})$ を $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}$ のスカラー三重積という. これについて, 交換法則

$$\mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) = \mathbf{B} \cdot (\mathbf{C} \times \mathbf{A}) = \mathbf{C} \cdot (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \quad (0.12)$$

が成立する.

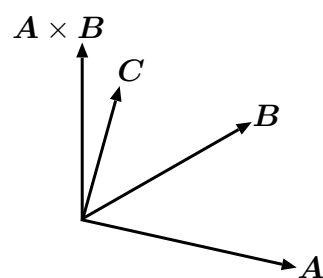


図 0.5: スカラー 3 重積

0.1.7.2 ベクトル三重積

$\mathbf{A} \times (\mathbf{B} \times \mathbf{C}), (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \times \mathbf{C}$ を $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}$ のベクトル三重積という. 掛ける順序が異なると, 異なるベクトルとなることに注意する.

$$\mathbf{A} \times (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) = \mathbf{B}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{C}) - \mathbf{C}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}), \quad (0.13a)$$

$$(\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \times \mathbf{C} = -\mathbf{A}(\mathbf{B} \cdot \mathbf{C}) + \mathbf{B}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{C}) \quad (0.13b)$$

問題

0.5 (0.12) を示せ.

0.6 (0.13a), (0.13b) を示せ.

0.7 ベクトル $\mathbf{A}$ を, それとは平行でないある単位ベクトル $\mathbf{e}$ の方向 $\mathbf{A}_{//}$ と, $\mathbf{e}$ に垂直な方向 $\mathbf{A}_{\perp}$ に分けると

$$\mathbf{A}_{//} = \mathbf{e}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{e}), \quad \mathbf{A}_{\perp} = \mathbf{e} \times (\mathbf{A} \times \mathbf{e})$$

となる. これを証明せよ.

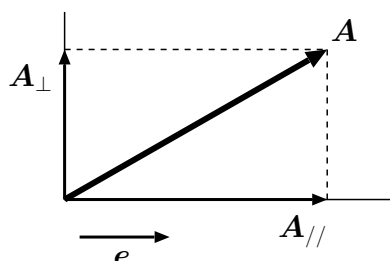


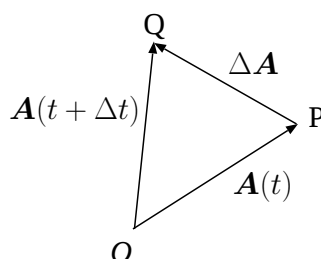
図 0.6. 問題 0.7

0.8 $\alpha, \mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ が既知で, $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} \neq 0$ とする. この時, $\mathbf{a} \cdot \mathbf{x} = \alpha, \mathbf{b} \times \mathbf{x} = \mathbf{c}$ を満たす $\mathbf{x}$ を, $\alpha, \mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ を用いて表せ.

0.1.8 ベクトルの微分

ベクトル $\mathbf{A}$ は変数 t の関数とする．これを $\mathbf{A}(t)$ と表記する．この時， $\mathbf{A}$ の t に関する微分を定義することができる．

0.1.8.1 定義



変数が t でのベクトル $\mathbf{A}(t)$ から， t が微小量 Δt だけ変化した後，ベクトル $\mathbf{A}(t + \Delta t)$ に，ベクトルの向きと大きさが変化したとする． Δt の間のベクトルの変化 $\Delta \mathbf{A}$ は，

$$\Delta \mathbf{A} = \mathbf{A}(t + \Delta t) - \mathbf{A}(t)$$

である．両辺を Δt で割る．

$$\frac{\Delta \mathbf{A}}{\Delta t} = \frac{\mathbf{A}(t + \Delta t) - \mathbf{A}(t)}{\Delta t}$$

図 0.7. ベクトルの微分.

$\Delta t \rightarrow 0$ の極限でのベクトル，

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \mathbf{A}}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\mathbf{A}(t + \Delta t) - \mathbf{A}(t)}{\Delta t}$$

をベクトル $\mathbf{A}$ の t に関する微分といい， $\frac{d\mathbf{A}}{dt}$ と表す．

0.1.8.2 デカルト座標系の場合

ベクトル $\mathbf{A}(t)$ のデカルト座標系に関する成分を $\mathbf{A}(t) = (A_x(t), A_y(t), A_z(t))$ とおく． $\mathbf{A}$ が t の関数であるとは，その成分 (A_x, A_y, A_z) が t の関数であるということである．デカルト座標系の基本ベクトルを用いると， $\mathbf{A}(t)$ は，

$$\mathbf{A}(t) = A_x(t)\mathbf{e}_x + A_y(t)\mathbf{e}_y + A_z(t)\mathbf{e}_z$$

と表される．これを微分すると，

$$\frac{d\mathbf{A}}{dt} = \frac{dA_x}{dt}\mathbf{e}_x + A_x \frac{d\mathbf{e}_x}{dt} + \frac{dA_y}{dt}\mathbf{e}_y + A_y \frac{d\mathbf{e}_y}{dt} + \frac{dA_z}{dt}\mathbf{e}_z + A_z \frac{d\mathbf{e}_z}{dt}$$

である．ここで，デカルト座標系の座標軸は空間に固定されているから，その基本ベクトルは一定である (t の関数ではない)．よって，その t に関する微分はゼロベクトルである．

$$\frac{d\mathbf{e}_x}{dt} = \frac{d\mathbf{e}_y}{dt} = \frac{d\mathbf{e}_z}{dt} = \mathbf{0}$$

従って， $\mathbf{A}$ の t に関する微分は

$$\frac{d\mathbf{A}}{dt} = \frac{dA_x}{dt}\mathbf{e}_x + \frac{dA_y}{dt}\mathbf{e}_y + \frac{dA_z}{dt}\mathbf{e}_z \quad (0.14)$$

となり，単にその成分の微分で表される．

0.1.8.3 直交曲線座標系等の場合

直交曲線座標系，回転座標系の場合，基本ベクトルは，時間 t を変数として， t の関数である．即ち，その微分はゼロベクトルではない．その場合のベクトルの微分については，それぞれ第 1.2 節，「一般力学 II」の「非慣性系における運動」で説明する．

0.1.8.4 積の演算に対する交換法則

ベクトルの微分に対してもスカラーに対する微分と同様、積の演算に対して以下の交換法則が成り立つ。

$$\frac{d}{dt}(f\mathbf{A}) = \frac{df}{dt}\mathbf{A} + f\frac{d\mathbf{A}}{dt}, \quad (0.15a)$$

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) = \frac{d\mathbf{A}}{dt} \cdot \mathbf{B} + \mathbf{A} \cdot \frac{d\mathbf{B}}{dt}, \quad (0.15b)$$

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{A} \times \mathbf{B}) = \frac{d\mathbf{A}}{dt} \times \mathbf{B} + \mathbf{A} \times \frac{d\mathbf{B}}{dt}. \quad (0.15c)$$

(0.15a) 式で、 f は t のスカラー関数である。

公式 (0.15b) の導出を示す。

変数が $t + \Delta t$ におけるスカラー積と変数が t におけるスカラー積の差を考える。

$$\begin{aligned} \mathbf{A}(t + \Delta t) \cdot \mathbf{B}(t + \Delta t) - \mathbf{A}(t) \cdot \mathbf{B}(t) &= (\mathbf{A}(t) + \Delta\mathbf{A}) \cdot (\mathbf{B}(t) + \Delta\mathbf{B}) - \mathbf{A}(t) \cdot \mathbf{B}(t) \\ &= \Delta\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}(t) + \mathbf{A}(t) \cdot \Delta\mathbf{B} + \Delta\mathbf{A} \cdot \Delta\mathbf{B} \end{aligned}$$

両辺を Δt で割る。

$$\frac{\mathbf{A}(t + \Delta t) \cdot \mathbf{B}(t + \Delta t) - \mathbf{A}(t) \cdot \mathbf{B}(t)}{\Delta t} = \frac{\Delta\mathbf{A}}{\Delta t} \cdot \mathbf{B}(t) + \mathbf{A}(t) \cdot \frac{\Delta\mathbf{B}}{\Delta t} + \frac{\Delta\mathbf{A}}{\Delta t} \cdot \Delta\mathbf{B}$$

ここで $\Delta t \rightarrow 0$ の極限をとる。右辺の最後の項は、 $\Delta\mathbf{B} = \frac{\Delta\mathbf{B}}{\Delta t} \Delta t$ より $\frac{\Delta\mathbf{A}}{\Delta t} \cdot \Delta\mathbf{B} = \frac{\Delta\mathbf{A}}{\Delta t} \cdot \frac{\Delta\mathbf{B}}{\Delta t} \Delta t$ と変形でき、 $\Delta t \rightarrow 0$ の極限で 0 に収束する。従って、 $\Delta t \rightarrow 0$ の極限で上式は (0.15b) に帰着する。

※ 公式 (0.15b) はエネルギー方程式の導出で用いる。

問題

0.9 公式 (0.15a), (0.15c) の導出を示せ。

0.10 ベクトル $\mathbf{A}$ の大きさが一定の場合、 $\mathbf{A}$ と $\frac{d\mathbf{A}}{dt}$ は垂直である。これを示せ。

0.11 t の関数であるベクトル $\mathbf{r}$ に対して、下式を示せ。

$$\frac{d}{dt} \left(\mathbf{r} \times \frac{d\mathbf{r}}{dt} \right) = \mathbf{r} \times \frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} \quad (0.16)$$

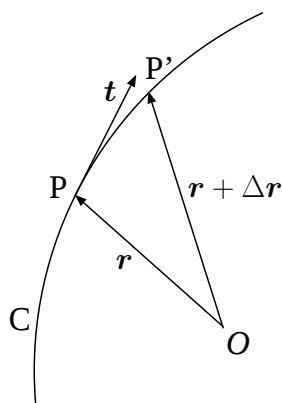
この式は角運動量方程式の導出で用いる。

0.1.9 ベクトルの線積分

0.1.9.1 曲線と接線

ベクトル $\mathbf{A}$ は座標 (x, y, z) の関数とする。今、3次元空間に曲線 C があるとして、この曲線上の任意の点 P の位置ベクトルを $\mathbf{r}$ 、点 P からベクトル $\Delta\mathbf{r}$ だけ離れた曲線上の点を P' とする。曲線 C に沿った点 P までの弧の長さを s 、 P と P' 間の弧の長さを Δs とする。この時、ベクトル $\frac{\Delta\mathbf{r}}{\Delta s}$ はベクトル $\overrightarrow{PP'}$ と同じ向きにあるから、 $\Delta s \rightarrow 0$ の極限のベクトル、

$$\lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{\Delta\mathbf{r}}{\Delta s} = \frac{d\mathbf{r}}{ds}$$



は、点 P における曲線 C の接線ベクトルを与える。

$$\lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{\overrightarrow{PP'}}{PP'} = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \left| \frac{\Delta \mathbf{r}}{\Delta s} \right| = 1$$

であるから、それは単位ベクトルとなる。この接線ベクトルを $\mathbf{t}$ とおく。

$$\mathbf{t} = \frac{d\mathbf{r}}{ds} \quad (0.17)$$

成分で表すと、

$$\mathbf{t} = \frac{d\mathbf{r}}{ds} = \left(\frac{dx}{ds}, \frac{dy}{ds}, \frac{dz}{ds} \right) \quad (0.18)$$

である。

0.1.9.2 曲線に沿った線積分

ベクトル $\mathbf{A} = (A_x, A_y, A_z)$ の曲線 C に沿った線積分は、以下で定義される。

$$\int_C \mathbf{A} \cdot \mathbf{t} ds$$

今、弧長が Δs である 2 点 P, P' に関して、 Δs が微小な場合、 $\mathbf{t}\Delta s = \Delta \mathbf{r}$ と近似できる。 $\Delta \mathbf{r}$ の成分を $(\Delta x, \Delta y, \Delta z)$ とすれば、

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{t}\Delta s = A_x \Delta x + A_y \Delta y + A_z \Delta z$$

である。従って、線積分は、

$$\int_C \mathbf{A} \cdot \mathbf{t} ds = \int_C \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r} = \int_C (A_x dx + A_y dy + A_z dz) \quad (0.19)$$

と表される。

問題

0.12 座標 (x, y) の関数であるベクトル $\mathbf{A}$ を $\mathbf{A} = x^2 \mathbf{e}_x + y^3 \mathbf{e}_y$ とする。 xy 平面上で、原点 O から点 $P(1, 1, 0)$ に至る放物線 $y = x^2$ を曲線 C とする。C に沿っての $\mathbf{A}$ の線積分の値を求めよ。

0.1.10 合成関数の微分

$y = f(x)$ は x の関数、又、 $x = g(t)$ は t の関数とする。この時、 $y = f(x)$ の x に $x = g(t)$ を代入すると、 $y = f(g(t))$ は t の関数となる。これを合成関数という。この関数の t に関する微分は、以下のようになる（合成関数の微分）。

$$\frac{dy}{dt} = \frac{dy}{dx} \cdot \frac{dx}{dt} \quad (0.20)$$

0.1.11 Taylor 級数

物理では、解釈を容易にするためや、解を解析的に得る目的で、しばしば近似的な取り扱いをする。この際、有用となるのがここで取り上げる Taylor 展開である。

x の関数 $f(x)$ が $x = a$ の近くで無限階微分可能な時、 $f(x)$ は $x = a$ の近くで、

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!} (x-a)^n = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2}(x-a)^2 + \cdots \quad (0.21)$$

と展開される。これを $f(x)$ の Taylor 級数という。ここで、 $f^{(n)}(x)$ ($n = 1, 2, \dots$) は $f(x)$ の n 階微係数である。又、 $n = 0$ の場合は $f^{(0)}(x) = f(x)$ と約束する。特に、 $a = 0$ でも (0.21) が成り立つ時、これを Maclaurin 級数という。

主な関数について Maclaurin 級数の例を以下に示す。

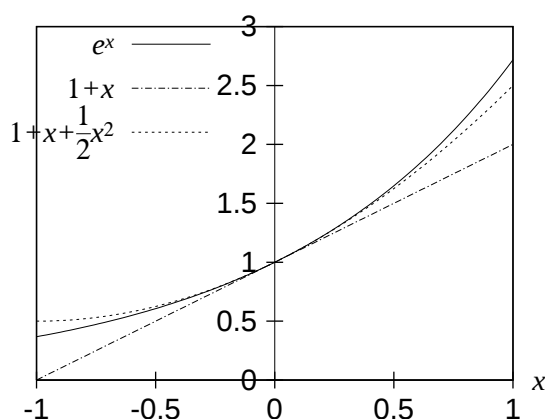
$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \cdots, \quad (0.22a)$$

$$\cos x = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{(2m)!} x^{2m} = 1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{24}x^4 + \cdots, \quad (0.22b)$$

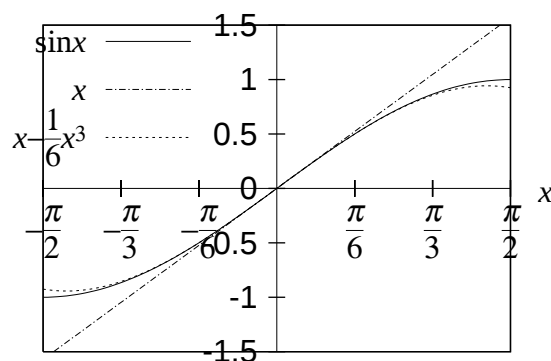
$$\sin x = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{(2m+1)!} x^{2m+1} = x - \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{120}x^5 - \cdots, \quad (0.22c)$$

$$\frac{1}{1+x} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n = 1 - x + x^2 - x^3 + \cdots, \quad (0.22d)$$

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots. \quad (0.22e)$$



(a) e^x の場合.



(b) $\sin x$ の場合.

図 0.8. Maclaurin 展開 (第 1 項及び第 2 項まで) による近似

図 0.8 は、 e^x , $\sin x$ について、Taylor 展開の最初の 1 ~ 2 項が、もとの関数と比べてどの程度よい近似となっているのかを示す。 $x = 0$ の近くでは Taylor 展開の最初の 1 項だけでもそれなりによい近似になっている。

0.2 常微分方程式

物体の運動を記述する方程式（運動方程式）は、時間を独立変数として、1 階（速度が従属変数の場合）又は 2 階（座標が従属変数の場合）の常微分方程式である。従って、常微分方程式を解くという作業は、力学の問題を解く重要な一過程である。この節では、この常微分方程式の解法について説明する。

0.2.1 一般論

1 階の常微分方程式の一般解には、任意定数が 1 個含まれる。2 階の常微分方程式の一般解には、任意定数が 2 個含まれる。初期条件を与えると任意定数の値が決まり、微分方程式の解は一意に定まる。このように、任意定数に特定の値を与えたものを特解という。

0.2.2 1 階常微分方程式

変数 v が独立変数 t の関数で、その 1 階微分との間に関係式

$$\frac{dv}{dt} + P(t)v = Q(t) \quad (0.23)$$

が成り立つとする。ここで、 $P(t)$, $Q(t)$ は与えられた t の関数とする。この関係式を **1 階常微分方程式** という。特に、 $Q(t) = 0$ の場合の方程式

$$\frac{dv}{dt} + P(t)v = 0 \quad (0.24)$$

を (0.23) の **同次（斉次）方程式**，それに対して (0.23) を **非同次（非斉次）方程式** とよぶ。

0.2.2.1 同次方程式の解法

同次方程式 (0.24) は以下のように、**変数分離法**により解くことができる。(0.24) を形式的に、**左辺は従属変数 v だけを含むように、右辺は独立変数 t だけを含むように変形する。**

$$\frac{dv}{v} = -P(t)dt$$

その後、左辺を v について、右辺を t について積分する。

$$\int \frac{dv}{v} = - \int P(t)dt$$

$$\log |v| = - \int P(t)dt + C'$$

ここで、 C' は不定積分の過程で現れる積分定数で、任意定数とよばれる。又、対数の引数には絶対値が付くことに注意する。対数はずし¹，更に、絶対値はずす。

$$|v| = \exp \left[- \int P(t)dt + C' \right] = e^{C'} \cdot \exp \left[- \int P(t)dt \right]$$

$$v = \pm e^{C'} \cdot \exp \left[- \int P(t)dt \right]$$

¹記号 $\exp$ は指数関数を意味する。引数が複雑な式の場合、このような表記をする。

最後に、任意定数を $C = \pm e^{C'}$ と置き換えると、

$$v = C \exp \left[- \int P(t) dt \right] \quad (0.25)$$

が得られる。このように任意定数を含む解のことを、**一般解**という。

例題0.13

$$\frac{dv}{dt} = -\lambda v \quad (0.26)$$

ここで λ は定数とする。

まず、左辺は従属変数 v のみ、右辺は独立変数 t と定数のみを含む形の**変数分離形**に変形する。

$$\frac{dv}{v} = -\lambda dt$$

次に、左辺を v について、右辺を t について積分する。

$$\int \frac{dv}{v} = -\lambda \int dt$$

積分を実行した結果は以下のようになる。

$$\log |v| = -\lambda t + C'$$

ここで C' は任意定数である。対数をはずし、更に、絶対値をはずして、 v について解く。

$$|v| = e^{-\lambda t + C'} = e^{C'} \cdot e^{-\lambda t}$$

$$v = \pm e^{C'} \cdot e^{-\lambda t}$$

最後に、任意定数を $C = \pm e^{C'}$ と置き換えると、一般解が、

$$v = C e^{-\lambda t} \quad (0.27)$$

と得られる。

問題

0.14 以下の常微分方程式の一般解を求めよ。ただし、 λ, g は 0 でない定数とする。

(i) $\frac{dv}{dt} = -\lambda v - g$

(ii) $\frac{dv}{dt} = -\lambda v^2$

(iii) $\frac{dv}{dt} + v \cos t = 0$

例題0.15

$$\frac{dv}{dt} = -kv^2 - g \quad (0.28)$$

ここで k, g は 0 でない定数とする。

以下のように変数分離形に変形する。

$$\frac{dv}{dt} = -k \left(v^2 + \frac{g}{k} \right)$$

$$\frac{dv}{v^2 + \frac{g}{k}} = -kdt$$

次に、左辺を v について、右辺を t について積分する。

$$\int \frac{dv}{v^2 + \frac{g}{k}} = -k \int dt = -kt + C' \quad (0.29)$$

ここで C' は任意定数である。

左辺の積分、

$$I = \int \frac{dv}{v^2 + \frac{g}{k}} \quad (0.30)$$

を、置換積分法により計算する。即ち、変数 v を、

$$v = \sqrt{\frac{g}{k}} \tan \theta$$

と変数変換する。この場合、

$$v^2 + \frac{g}{k} = \frac{g}{k} (\tan^2 \theta + 1) = \frac{g}{k} \frac{1}{\cos^2 \theta},$$

$$dv = \sqrt{\frac{g}{k}} \frac{d\theta}{\cos^2 \theta},$$

であるから、積分は、

$$I = \sqrt{\frac{k}{g}} \int d\theta$$

と置き換えられる。この積分は簡単に計算できて、

$$I = \sqrt{\frac{k}{g}} \theta$$

となる。ここで、積分定数は、(0.29) の右辺に付けたため、省略した。これを (0.29) の左辺へ代入すると、

$$\theta = -\sqrt{kgt} + \sqrt{\frac{g}{k}} C' = -\sqrt{kgt} + C$$

となる。最後の式では、任意定数を $C = \sqrt{\frac{g}{k}} C'$ と置き換えた。

従属変数を変数変換前の変数 v に戻すため、更に変形を続ける。まず、両辺の tangent をとる。

$$\tan \theta = \tan(-\sqrt{kgt} + C)$$

次に、両辺に $\sqrt{\frac{g}{k}}$ を掛けると、

$$v = \sqrt{\frac{g}{k}} \tan \theta = \sqrt{\frac{g}{k}} \tan(-\sqrt{kgt} + C) \quad (0.31)$$

が得られる。

例題0.16

$$\frac{dv}{dt} = kv^2 - g \quad (0.32)$$

ここで k, g は 0 でない定数とする.

例題 0.15 と同様, 以下のように変数分離形に変形し, 積分する.

$$\begin{aligned}\frac{dv}{dt} &= k \left(v^2 - \frac{g}{k} \right) \\ \frac{dv}{v^2 - \frac{g}{k}} &= k dt \\ \int \frac{dv}{v^2 - \frac{g}{k}} &= k \int dt = kt + C'\end{aligned}\tag{0.33}$$

ここで, C' は任意定数である.

左辺の積分,

$$I = \int \frac{dv}{v^2 - \frac{g}{k}}\tag{0.34}$$

を考える. (0.30) と形が似ているが, 積分法は全く異なる.

まず, 被積分関数は,

$$\frac{1}{v^2 - \frac{g}{k}} = \frac{1}{\left(v + \sqrt{\frac{g}{k}}\right) \left(v - \sqrt{\frac{g}{k}}\right)}\tag{0.35}$$

なる形に因数分解できる. この場合,

$$\frac{1}{\left(v + \sqrt{\frac{g}{k}}\right) \left(v - \sqrt{\frac{g}{k}}\right)} = \frac{A}{v + \sqrt{\frac{g}{k}}} + \frac{B}{v - \sqrt{\frac{g}{k}}}\tag{0.36}$$

なる形に, **部分分数に展開**できる. A, B はこれから決める定数である. 右辺は逆に,

$$\frac{A}{v + \sqrt{\frac{g}{k}}} + \frac{B}{v - \sqrt{\frac{g}{k}}} = \frac{(A+B)v + \sqrt{\frac{g}{k}}(-A+B)}{\left(v + \sqrt{\frac{g}{k}}\right) \left(v - \sqrt{\frac{g}{k}}\right)}$$

と変形されるから, この右辺と (0.36) の左辺を比較すると, 恒等式

$$(A+B)v + \sqrt{\frac{g}{k}}(-A+B) = 1$$

が得られる. この恒等式が, 任意の実数 v に対して成立するためには,

$$A+B=0, \quad \sqrt{\frac{g}{k}}(-A+B)=1,$$

が満たされなければならない. これより, A, B は,

$$A = -\frac{1}{2}\sqrt{\frac{k}{g}}, \quad B = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{k}{g}},$$

と定まる. 以上より, 被積分関数は,

$$\frac{1}{v^2 - \frac{g}{k}} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{k}{g}} \left(\frac{1}{v - \sqrt{\frac{g}{k}}} - \frac{1}{v + \sqrt{\frac{g}{k}}} \right)$$

なる形に部分分数に展開されることがわかる. これを (0.34) に適用する.

$$I = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{k}{g}} \int \left(\frac{1}{v - \sqrt{\frac{g}{k}}} - \frac{1}{v + \sqrt{\frac{g}{k}}} \right) dv\tag{0.37}$$

この積分は以下のように計算される.

$$I = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{k}{g}} \left(\log \left| v - \sqrt{\frac{g}{k}} \right| - \log \left| v + \sqrt{\frac{g}{k}} \right| \right) = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{k}{g}} \log \left| \frac{v - \sqrt{\frac{g}{k}}}{v + \sqrt{\frac{g}{k}}} \right|$$

なお, 積分定数は, (0.33) の右辺に付けたため, 省略した. これを (0.33) の左辺に代入する.

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \sqrt{\frac{k}{g}} \log \left| \frac{v - \sqrt{\frac{g}{k}}}{v + \sqrt{\frac{g}{k}}} \right| &= kt + C' \\ \log \left| \frac{v - \sqrt{\frac{g}{k}}}{v + \sqrt{\frac{g}{k}}} \right| &= 2\sqrt{kg}t + 2\sqrt{\frac{g}{k}}C' \end{aligned}$$

対数をはずし, 絶対値をはずす.

$$\begin{aligned} \left| \frac{v - \sqrt{\frac{g}{k}}}{v + \sqrt{\frac{g}{k}}} \right| &= e^{2\sqrt{\frac{g}{k}}C'} \cdot e^{2\sqrt{kg}t} \\ \frac{v - \sqrt{\frac{g}{k}}}{v + \sqrt{\frac{g}{k}}} &= \pm e^{2\sqrt{\frac{g}{k}}C'} \cdot e^{2\sqrt{kg}t} = Ce^{2\sqrt{kg}t} \end{aligned}$$

最後の式では, 任意定数を $C = \pm e^{2\sqrt{\frac{g}{k}}C'}$ と置き換えた. これを v について解くと,

$$v = \sqrt{\frac{g}{k}} \cdot \frac{1 + Ce^{2\sqrt{kg}t}}{1 - Ce^{2\sqrt{kg}t}} \quad (0.38)$$

が得られる.

0.2.3 2階常微分方程式

0.2.3.1 一般論

変数 x が独立変数 t の関数で, その 1, 2 階微分との間に関係式

$$\frac{d^2x}{dt^2} + f_1(t) \frac{dx}{dt} + f_2(t)x = f(t) \quad (0.39)$$

が成り立つとする. ここで, $f_1(t), f_2(t), f(t)$ は, 与えられた t の関数とする. この関係式を 2 階常微分方程式という. 特に, 右辺が 0, 即ち, $f(t) = 0$ の場合の方程式

$$\frac{d^2x}{dt^2} + f_1(t) \frac{dx}{dt} + f_2(t)x = 0 \quad (0.40)$$

を**同次方程式**, それに対して (0.39) を**非同次方程式**とよぶのは, 1 階常微分方程式の時と同様である.

$x_1(t), x_2(t)$ が共に (0.40) を満足する t の関数であるとする. 同時に 0 とはならない任意定数 C_1, C_2 に対して, $C_1x_1(t) + C_2x_2(t)$ が恒等的に 0 とはならない場合, $x_1(t), x_2(t)$ を (0.40) の 1 次独立な特解という.

同次方程式 (0.40) の一般解は, 任意定数 C_1, C_2 を用いて, 2 つの 1 次独立な特解の 1 次結合として,

$$x = C_1x_1(t) + C_2x_2(t)$$

のように表される.

0.2.3.2 定数係数の2階常微分方程式：同次方程式の場合

(0.40) の $f_1(t)$, $f_2(t)$ が定数（それぞれ $2a$, b とする）の場合の常微分方程式

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2a\frac{dx}{dt} + bx = 0 \quad (0.41)$$

について考える．この方程式に $e^{\lambda t}$ の形の特解が存在するとして，(0.41) に代入すると，

$$(\lambda^2 + 2a\lambda + b)e^{\lambda t} = 0$$

となる． $e^{\lambda t} \neq 0$ より， λ についての2次方程式

$$\lambda^2 + 2a\lambda + b = 0 \quad (0.42)$$

が得られる．これを**特性方程式**という． $a^2 \neq b$ の場合，(0.42) は互いに異なる2解 λ_1, λ_2 ,

$$\lambda_1 = -a + \sqrt{a^2 - b}, \quad \lambda_2 = -a - \sqrt{a^2 - b},$$

を持つ．この場合， $e^{(-a+\sqrt{a^2-b})t}$ と $e^{(-a-\sqrt{a^2-b})t}$ は1次独立であるから，(0.41) の一般解は，

$$x = C_1 e^{(-a+\sqrt{a^2-b})t} + C_2 e^{(-a-\sqrt{a^2-b})t} = e^{-at} \left(C_1 e^{\sqrt{a^2-b}t} + C_2 e^{-\sqrt{a^2-b}t} \right) \quad (0.43)$$

と表される．ここで C_1, C_2 は任意定数である．

[1] 特性方程式が複素数解を持つ場合

特に， $a^2 < b$ の場合，

$$\lambda_1 = -a + i\sqrt{b-a^2}, \quad \lambda_2 = -a - i\sqrt{b-a^2},$$

で， λ_1, λ_2 は複素数となる．ここで， i は虚数単位 ($i = \sqrt{-1}$) である．この場合，(0.41) の一般解を

$$x = e^{-at} \left(A \cos \sqrt{b-a^2}t + B \sin \sqrt{b-a^2}t \right) \quad (0.44)$$

と表すこともできる．ここで A, B は任意定数である．このことを，**オイラーの公式**を用いて示す．

まず， $a^2 < b$ の場合，一般解(0.43) は，

$$x = e^{-at} \left(C_1 e^{i\sqrt{b-a^2}t} + C_2 e^{-i\sqrt{b-a^2}t} \right)$$

と表される．ここでオイラーの公式(0.45a)を適用すると，

$$x = e^{-at} \left[C_1 \left(\cos \sqrt{b-a^2}t + i \sin \sqrt{b-a^2}t \right) + C_2 \left(\cos \sqrt{b-a^2}t - i \sin \sqrt{b-a^2}t \right) \right]$$

と変形される．これを整理し，

$$x = e^{-at} \left[(C_1 + C_2) \cos \sqrt{b-a^2}t + i(C_1 - C_2) \sin \sqrt{b-a^2}t \right]$$

任意定数を，

$$A = C_1 + C_2, \quad B = i(C_1 - C_2),$$

と置き換えると，一般解は(0.44)のように表すことができる．

[2] オイラーの公式

$$e^{\pm i\theta} = \cos \theta \pm i \sin \theta \quad (\text{複号同順}), \quad (0.45a)$$

$$\cos \theta = \frac{1}{2} (e^{i\theta} + e^{-i\theta}), \quad \sin \theta = \frac{1}{2i} (e^{i\theta} - e^{-i\theta}). \quad (0.45b)$$

[3] 特性方程式が重解を持つ場合

$a^2 = b$ の場合, 特性方程式 (0.42) は重解を持つ. この場合, (0.41) の特解は e^{-at} となる. 2 階の常微分方程式には 1 次独立な特解は 2 個存在するから, もう 1 つ, 特解が存在するはずである. もう 1 つの特解の見つけ方を示す.

既知の特解 e^{-at} からもう 1 つの特解を見つけるため, ϕ を t の関数として, 未知の特解を,

$$x = \phi e^{-at}$$

なる形におく. この場合,

$$\frac{dx}{dt} = \left(\frac{d\phi}{dt} - a\phi \right) e^{-at},$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \left(\frac{d^2\phi}{dt^2} - 2a\frac{d\phi}{dt} + a^2\phi \right) e^{-at},$$

となる. これらを $a^2 = b$ の場合の常微分方程式

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2a\frac{dx}{dt} + a^2x = 0 \quad (0.46)$$

に代入し, 整理すると, $e^{-at} \neq 0$ より,

$$\frac{d^2\phi}{dt^2} = 0$$

に帰着する. これを 2 回積分すると, ϕ が,

$$\phi = C_1 + C_2 t$$

のように求まる. ここで C_1, C_2 は積分定数である. よって, 解は,

$$x = (C_1 + C_2 t) e^{-at} \quad (0.47)$$

なる形となる. 従って, 既知の特解 e^{-at} に対して, もう 1 つの特解は te^{-at} であることがわかる. 従って, $a^2 = b$ の場合の一般解は, (0.47) となる.

0.2.3.3 定数係数の 2 階常微分方程式：非同次方程式の場合

$f(t)$ を t の与えられた関数として, 非同次方程式

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2a\frac{dx}{dt} + bx = f(t) \quad (0.48)$$

について考える. 何らかの方法でこの方程式の特解 $x_p(t)$ が得られたとすると, 一般解は同次方程式の一般解 (0.43) と非同次方程式の特解 $x_p(t)$ の和

$$x = e^{-at} \left(C_1 e^{\sqrt{a^2-b}t} + C_2 e^{-\sqrt{a^2-b}t} \right) + x_p(t) \quad (0.49)$$

となる ($a^2 \neq b$ の場合). この具体例は, 「第 7 章 振動論」の「第 7.4 節 抵抗のない強制振動」, 「第 7.5 節 抵抗のある強制振動」で取り上げる. そこで非同次方程式の特解 $x_p(t)$ の求め方を説明する.

付 録 0.A ベクトルの一次独立性

3次元空間において3つのベクトル $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$, $\mathbf{C}$ がある. a, b, c をスカラーとして, これらのベクトルの一次結合がゼロベクトル, 即ち,

$$a\mathbf{A} + b\mathbf{B} + c\mathbf{C} = \mathbf{0} \quad (0.50)$$

となったとする. これを満たす a, b, c は $a = b = c = 0$ に限られる時, 3つのベクトル $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$, $\mathbf{C}$ は一次独立であるという. 一次独立でない時は一次従属であるという.

仮に, $\mathbf{B}$ と $\mathbf{C}$ が平行であったとする. この場合, λ を 0 でない実数として, $\mathbf{C} = \lambda\mathbf{B}$ と表すことができる. これを (0.50) に代入すると, $a \neq 0$ の場合, $\mathbf{A} = -\frac{b+c\lambda}{a}\mathbf{B}$ となり, $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$, $\mathbf{C}$ は一次従属となることがわかる.

基本ベクトルは一次独立なベクトルの組である.

付 録 0.B ベクトル積の3つの性質から, ベクトル積の成分表示を導出

2つのベクトル $\mathbf{A} = (A_x, A_y, A_z)$, $\mathbf{B} = (B_x, B_y, B_z)$ に対して, 以下の3つの性質を満たすベクトル $\mathbf{C} = (C_x, C_y, C_z)$ の成分 (0.9) を求める.

(i) $\mathbf{C}$ の大きさは, $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$ で張られる平行四辺形の面積 $AB \sin \theta$ に等しい.

(ii) $\mathbf{C}$ は $\mathbf{A}$ にも $\mathbf{B}$ にも垂直である.

(iii) $\mathbf{C}$ の向きは, $\mathbf{A}$ から $\mathbf{B}$ に右ネジを回した時, ネジの進む向きで定義する.

ここで,

$$A = |\mathbf{A}| = \sqrt{A_x^2 + A_y^2 + A_z^2}, \quad B = |\mathbf{B}| = \sqrt{B_x^2 + B_y^2 + B_z^2} \quad (0.51)$$

はそれぞれ $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$ の大きさで, θ は $\mathbf{A}$ と $\mathbf{B}$ のなす角である. このなす角の余弦は, スカラー積の定義より,

$$\cos \theta = \frac{\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}}{|\mathbf{A}| |\mathbf{B}|} = \frac{A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z}{\sqrt{A_x^2 + A_y^2 + A_z^2} \sqrt{B_x^2 + B_y^2 + B_z^2}} \quad (0.52)$$

である. 仮に, ベクトル $\mathbf{C}$ の大きさを C とおく.

$$C = |\mathbf{C}| = \sqrt{C_x^2 + C_y^2 + C_z^2} \quad (0.53)$$

[1] 性質 (ii) の適用

性質 (ii) は, スカラー積を用いて,

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{C} = \mathbf{B} \cdot \mathbf{C} = 0$$

と表される. これを成分を用いて表すと, 以下の2式となる.

$$A_x C_x + A_y C_y + A_z C_z = 0 \quad (0.54a)$$

$$B_x C_x + B_y C_y + B_z C_z = 0 \quad (0.54b)$$

最初に, C_y, C_z を C_x 及び $\mathbf{A}, \mathbf{B}$ の成分で表すことにする. (0.54a) $\times B_z - (0.54b) \times A_z$ より,

$$C_y = \frac{A_z B_x - A_x B_z}{A_y B_z - A_z B_y} C_x \quad (0.55)$$

が得られる. 同様に, (0.54a) $\times B_y - (0.54b) \times A_y$ より,

$$C_z = \frac{A_x B_y - A_y B_x}{A_y B_z - A_z B_y} C_x \quad (0.56)$$

が得られる. ここで, $A_y B_z \neq A_z B_y$ と仮定した.

(0.55), (0.56) を (0.53) の2乗に代入すると,

$$C^2 = \left[1 + \left(\frac{A_z B_x - A_x B_z}{A_y B_z - A_z B_y} \right)^2 + \left(\frac{A_x B_y - A_y B_x}{A_y B_z - A_z B_y} \right)^2 \right] C_x^2$$

となる. これを C_x について解くと,

$$C_x^2 = \frac{(A_y B_z - A_z B_y)^2}{(A_y B_z - A_z B_y)^2 + (A_z B_x - A_x B_z)^2 + (A_x B_y - A_y B_x)^2} C^2 \quad (0.57)$$

となる.

[2] 性質 (i) の適用

性質 (i) は,

$$C = AB \sin \theta$$

と表される. この2乗

$$C^2 = A^2 B^2 \sin^2 \theta = A^2 B^2 (1 - \cos^2 \theta)$$

に (0.51), (0.52) を代入すると,

$$C^2 = (A_x^2 + A_y^2 + A_z^2)(B_x^2 + B_y^2 + B_z^2) \left[1 - \left(\frac{A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z}{\sqrt{A_x^2 + A_y^2 + A_z^2} \sqrt{B_x^2 + B_y^2 + B_z^2}} \right)^2 \right]$$

となる. これを整理すると,

$$C^2 = (A_y B_z - A_z B_y)^2 + (A_z B_x - A_x B_z)^2 + (A_x B_y - A_y B_x)^2 \quad (0.58)$$

が得られる. (0.58) を (0.57) に代入すると,

$$C_x^2 = (A_y B_z - A_z B_y)^2$$

が得られる. この平方根を取る. 符号は決まらないので, 複号は残る.

$$C_x = \pm (A_y B_z - A_z B_y) \quad (0.59)$$

(0.55), (0.56) に (0.59) を代入すると,

$$C_y = \pm (A_z B_x - A_x B_z), \quad C_z = \pm (A_x B_y - A_y B_x)$$

が得られる. ここで複号同順である.

以上をまとめると, 性質 (i), (ii) を満足する $\mathbf{C}$ の成分は,

$$\mathbf{C} = \pm (A_y B_z - A_z B_y, A_z B_x - A_x B_z, A_x B_y - A_y B_x) \quad (\text{複号同順}) \quad (0.60)$$

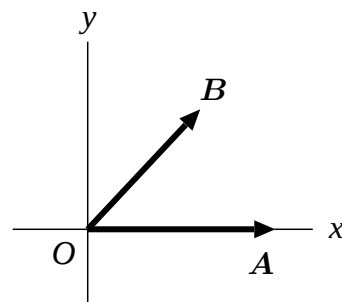
と表される.

[3] 性質 (iii) の適用

簡単のため、 $\mathbf{A}$ は x 軸の正の向きを向く（即ち、 $A_x > 0, A_y = A_z = 0$ ）とする。又、 $\mathbf{B}$ は xy 平面上にあり、第 1 象限を向く（即ち、 $B_x, B_y > 0, B_z = 0$ ）とする。この場合、(0.60) より得られる $\mathbf{C}$ の成分は、

$$\mathbf{C} = \pm(0, 0, A_x B_y) \quad (0.61)$$

となる。題意より、 $A_x B_y > 0$ であるから、複号のうち $+$ 符号を採用した場合は $+z$ 向きのベクトル、 $-$ 符号を採用した場合は $-z$ 向きのベクトルとなる。ところで、 $\mathbf{A}$ から $\mathbf{B}$ に右ネジを回した時、 $\mathbf{A}$ と $\mathbf{B}$ の位置関係より、ネジは $+z$ 向きに進む。これは (0.61) の複号のうち $+$ 符号を採用した場合に対応する。



従って、性質 (i), (ii), (iii) を満足する $\mathbf{C}$ の成分は、(0.60) の複号のうち $+$ 符号を採用することで、

$$\mathbf{C} = (A_y B_z - A_z B_y, A_z B_x - A_x B_z, A_x B_y - A_y B_x) \quad (0.9)$$

と表される。

付 録 0.C 定数係数の 2 階常微分方程式の解における解の重ね合わせ

変数 x を独立変数 t の関数として、定数係数の 2 階常微分方程式、

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + 2a \frac{dx}{dt} + bx = 0 \quad (0.41)$$

について考える。ここで a, b は定数とする。

[1] 解の重ね合わせ

この方程式の特解を ϕ_1, ϕ_2 とおく。

$$\frac{d^2 \phi_1}{dt^2} + 2a \frac{d\phi_1}{dt} + b\phi_1 = 0, \quad (0.62a)$$

$$\frac{d^2 \phi_2}{dt^2} + 2a \frac{d\phi_2}{dt} + b\phi_2 = 0, \quad (0.62b)$$

この時、 C_1, C_2 を任意定数として、2 つの特解の重ね合わせ、

$$x = C_1 \phi_1 + C_2 \phi_2$$

は (0.41) の解である。このことは、(0.62a) $\times C_1 +$ (0.62b) $\times C_2$ より、

$$\frac{d^2}{dt^2} (C_1 \phi_1 + C_2 \phi_2) + 2a \frac{d}{dt} (C_1 \phi_1 + C_2 \phi_2) + b (C_1 \phi_1 + C_2 \phi_2) = 0$$

となることから確かめることができる。

[2] 一般解

次に、特解の 1 つ $\phi_1 = e^{\lambda_1 t}$ が既にわかっているとした時、(0.41) の一般解を求める。

λ_1 は特性方程式の解であるから、

$$\lambda_1^2 + 2a\lambda_1 + b = 0 \quad (0.63)$$

を満足する.

(0.41) の解として, $x = ue^{\lambda_1 t}$ の形を仮定する. ここで u は t の未知の関数とする. この場合,

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= \left(\frac{du}{dt} + \lambda_1 u \right) e^{\lambda_1 t}, \\ \frac{d^2 x}{dt^2} &= \left(\frac{d^2 u}{dt^2} + 2\lambda_1 \frac{du}{dt} + \lambda_1^2 u \right) e^{\lambda_1 t}\end{aligned}$$

であるから, これらを (0.41) に代入すると, $e^{\lambda_1 t} \neq 0$ より,

$$\frac{d^2 u}{dt^2} + 2(\lambda_1 + a) \frac{du}{dt} = 0 \quad (0.64)$$

が得られる. 便宜上, $v = \frac{du}{dt}$ とおくと,

$$\frac{dv}{dt} + 2(\lambda_1 + a)v = 0$$

と表される. $\lambda_1 + a$ は定数であるから, この 1 階常微分方程式の一般解は, C'_1 を任意定数として,

$$v = C'_1 e^{-2(a+\lambda_1)t}$$

となる.

$$\frac{du}{dt} = C'_1 e^{-2(a+\lambda_1)t}$$

を積分すると, (0.64) の一般解は, C_2 を任意定数として,

$$u = -\frac{1}{2(a+\lambda_1)} C'_1 e^{-2(a+\lambda_1)t} + C_2$$

と求まる. ここで任意定数を $C_1 = -\frac{1}{2(a+\lambda_1)} C'_1$ と置き換える. (0.41) の一般解は,

$$x = C_1 e^{-(2a+\lambda_1)t} + C_2 e^{\lambda_1 t}$$

となる. $\lambda_2 = -(2a + \lambda_1)$ は, 特性方程式を満たす, 即ち,

$$\lambda_2^2 + 2a\lambda_2 + b = 0$$

であることから, $e^{\lambda_2 t}$ はもう 1 つの特解である. 以上より, (0.41) の一般解は, C_1, C_2 を任意定数として, 2 つの特解 $e^{\lambda_1 t}, e^{\lambda_2 t}$ の重ね合わせ,

$$x = C_1 e^{\lambda_2 t} + C_2 e^{\lambda_1 t}$$

で表される.

付 録 0.D 関数形の 1 次独立性とロンスキー行列式

t を独立変数とする, 2 つの 関数 ϕ_1, ϕ_2 が与えられたとする. C_1, C_2 を定数とした時, 関係式,

$$C_1 \phi_1 + C_2 \phi_2 = 0 \quad (0.65)$$

が成り立つのは、 $C_1 = C_2 = 0$ の場合に限られる時、この2つの関数からなる系は、**1次独立（線形独立）**であるという。

関数系 ϕ_1, ϕ_2 が1次独立である条件は、**ロンスキー行列式**、

$$W = \begin{vmatrix} \phi_1 & \phi_2 \\ \frac{d\phi_1}{dt} & \frac{d\phi_2}{dt} \end{vmatrix} \quad (0.66)$$

が0とならないことである。

この証明は、以下のようになる。(0.65) が成り立つ場合、この両辺を t で微分すると、

$$C_1 \frac{d\phi_1}{dt} + C_2 \frac{d\phi_2}{dt} = 0 \quad (0.67)$$

となる。(0.65), (0.67) は行列の形にまとめると、

$$\begin{pmatrix} \phi_1 & \phi_2 \\ \frac{d\phi_1}{dt} & \frac{d\phi_2}{dt} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (0.68)$$

と表される。行列式 (0.66) が0でない場合、行列

$$\begin{pmatrix} \phi_1 & \phi_2 \\ \frac{d\phi_1}{dt} & \frac{d\phi_2}{dt} \end{pmatrix}$$

の逆行列が存在する。(0.68) の両辺にこの逆行列を掛けることで、

$$\begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

なる解が得られる。従って、ロンスキー行列式 (0.66) が0でない場合、関数系 ϕ_1, ϕ_2 は1次独立である。

$\lambda_1 \neq \lambda_2$ の場合について、関数系 $e^{\lambda_1 t}, e^{\lambda_2 t}$ のロンスキー行列式を計算する。

$$W = \begin{vmatrix} e^{\lambda_1 t} & e^{\lambda_2 t} \\ \frac{d}{dt}(e^{\lambda_1 t}) & \frac{d}{dt}(e^{\lambda_2 t}) \end{vmatrix} = (\lambda_2 - \lambda_1)e^{(\lambda_1 + \lambda_2)t}$$

となる。 $\lambda_1 \neq \lambda_2$ の場合、確かに0ではないから、関数系 $e^{\lambda_1 t}, e^{\lambda_2 t}$ は1次独立である。

第1章 運動学

本章の前半では、ベクトルの微分を用いた速度，加速度の定義について説明する．本章の後半では，デカルト座標系とは種類の異なる座標系として，直交曲線座標系について説明をする．直交曲線座標系では基本ベクトルが時間の関数となるため，速度，加速度の表式はデカルト座標系のそれとは大きく異なる．ここでは，直交曲線座標系の代表的な例として，2次元極座標系，円筒座標系を取り上げる．

1.1 速度・加速度

1.1.1 速度・加速度の定義

位置ベクトル $\mathbf{r}$ で表される点 P が空間を運動しているとする．この時， $\mathbf{r}$ は時間 t の関数である．点の運動にともない点が描く曲線を軌道という．

時刻 t での位置 P から時間が微小量 Δt だけ経過した後の位置 Q の位置ベクトルを $\mathbf{r}(t + \Delta t)$ とする． Δt の間の位置ベクトルの変化 $\Delta \mathbf{r}$ は，

$$\frac{\Delta \mathbf{r}}{\Delta t} = \frac{\mathbf{r}(t + \Delta t) - \mathbf{r}(t)}{\Delta t}$$

である． $\frac{\Delta \mathbf{r}}{\Delta t}$ は t の増加に従い，点が移動する向き $\overrightarrow{PQ}$ に向かうベクトルである． $\Delta t \rightarrow 0$ の極限でのベクトル，

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \mathbf{r}}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\mathbf{r}(t + \Delta t) - \mathbf{r}(t)}{\Delta t}$$

をベクトル $\mathbf{r}$ の t に関する微分という．位置ベクトル $\mathbf{r}$ の時間に関する微分 $\frac{d\mathbf{r}}{dt}$ を速度と呼ぶ．力学ではよく，時間に関する微分を $\frac{d\mathbf{r}}{dt}$ の代わりに，文字の上につけた点で $\dot{\mathbf{r}}$ と表記する．本授業でもこの表記を採用する．速度を，

$$\mathbf{v} = \dot{\mathbf{r}}$$

とおく．速度は軌道の接線ベクトルである．

時刻 t での速度 $\mathbf{v}(t)$ から時間が微小量 Δt だけ経過した後の速度を $\mathbf{v}(t + \Delta t)$ とする． Δt の間の速度ベクトルの変化を $\Delta \mathbf{v}$ とすると，

$$\frac{\Delta \mathbf{v}}{\Delta t} = \frac{\mathbf{v}(t + \Delta t) - \mathbf{v}(t)}{\Delta t}$$

である． $\Delta t \rightarrow 0$ の極限でのベクトル，即ち，速度の時間に関する微分，

$$\dot{\mathbf{v}} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \mathbf{v}}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\mathbf{v}(t + \Delta t) - \mathbf{v}(t)}{\Delta t}$$

図 1.2. 速度と加速度.

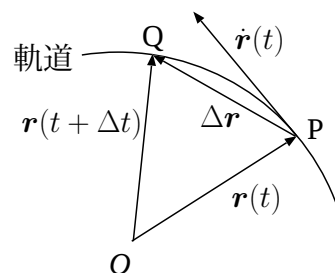
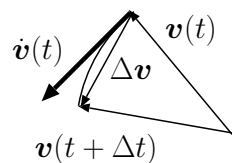


図 1.1. 軌道，位置ベクトル，速度.



を加速度と呼ぶ。加速度は位置ベクトルを用いると時間に関する2階微分 $\frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2}$ となる。時間に関する2階微分を $\frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2}$ の代わりに、文字の上に付けた2個の点で $\ddot{\mathbf{r}}$ と表記する。加速度を $\mathbf{a}$ とおく。

$$\mathbf{a} = \dot{\mathbf{v}} = \ddot{\mathbf{r}}$$

1.1.2 速度・加速度のデカルト座標系における表式

デカルト座標系の基本ベクトルを $\{\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z\}$ 、位置ベクトル $\mathbf{r}$ のデカルト座標を (x, y, z) とおく。

$$\mathbf{r} = x\mathbf{e}_x + y\mathbf{e}_y + z\mathbf{e}_z \quad (1.1)$$

デカルト座標系の基本ベクトルは空間に固定されており、時間には依存しないから、その時間微分は $\mathbf{0}$ 、即ち、

$$\dot{\mathbf{e}}_x = \dot{\mathbf{e}}_y = \dot{\mathbf{e}}_z = \mathbf{0} \quad (1.2)$$

である。この場合、速度、加速度は以下のように、単にその座標の時間微分で表される。

$$\mathbf{v} = \dot{\mathbf{r}} = \dot{x}\mathbf{e}_x + \dot{y}\mathbf{e}_y + \dot{z}\mathbf{e}_z, \quad (1.3)$$

$$\mathbf{a} = \dot{\mathbf{v}} = \ddot{\mathbf{r}} = \ddot{x}\mathbf{e}_x + \ddot{y}\mathbf{e}_y + \ddot{z}\mathbf{e}_z. \quad (1.4)$$

問題

- 1.1 位置が $x = u_0 t$, $y = v_0 t - \frac{g}{2} t^2$ で与えられる物体の軌道の方程式を求め、それを図示せよ。更に、速度、加速度を求め、それらをベクトルとして重ねて図示せよ。ここで、 u_0, v_0, g は定数とする。
- 1.2 位置が $x = A \cos \omega t$, $y = B \sin \omega t$ で与えられる場合について、同様に答えよ。ここで、 A, B, ω は定数とする。図示する時は、 $A > B$ と仮定する。

1.2 直交曲線座標系

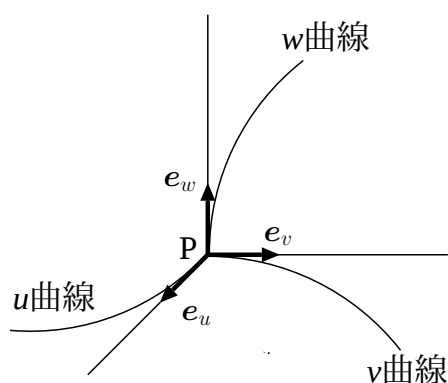


図 1.3. 直交曲線座標系

デカルト座標 (x, y, z) の3つの関数、

$$u = F(x, y, z), \quad v = G(x, y, z), \quad w = H(x, y, z), \quad (1.5)$$

がある。ある条件を満たす場合、(1.5) は逆に解くことができ、 (u, v, w) の3つの関数 f, g, h を用いて、

$$x = f(u, v, w), \quad y = g(u, v, w), \quad z = h(u, v, w), \quad (1.6)$$

と表すことができる。デカルト座標 (x, y, z) に対して、 (u, v, w) の値の組が対応する。逆に、 (u, v, w) の値の組に対して、デカルト座標 (x, y, z) が対応する。この (u, v, w) の値の組を曲線座標と言う。

c_1, c_2, c_3 をある定数とする。この時、 $F(x, y, z) = c_1$, $G(x, y, z) = c_2$, $H(x, y, z) = c_3$ はそれぞれ3次元空間内での曲面を表す。2つの曲面の交線は曲線となる。曲面 $G(x, y, z) = c_2$ と $H(x, y, z) = c_3$ の交線を u 曲線、曲面 $H(x, y, z) = c_3$ と $F(x, y, z) = c_1$ の交線を v 曲線、曲面 $F(x, y, z) = c_1$ と $G(x, y, z) = c_2$ の交線を w 曲線と呼ぶ。

u 曲線, v 曲線, w 曲線は, ある 1 点 P で交わる. 点 P を始点として, u が増加する向きにとった単位ベクトルを e_u , v が増加する向きにとった単位ベクトルを e_v , w が増加する向きにとった単位ベクトルを e_w とする. e_u, e_v, e_w が互いに垂直である場合, これらのベクトルを基本ベクトルとした座標系を, 直交曲線座標系と言う.

扱う問題によってはデカルト座標系ではなく, 直交曲線座標系を用いる方が便利なこともある. 直交曲線座標系では, 物体の運動 (位置ベクトルの時間的変化) にともない, **基本ベクトルの向きも時間的に変化する**. 即ち, **基本ベクトルは時間の関数**である. この場合, 速度や加速度の表式は, デカルト座標系の場合のような単純な形にはならない.

1.3 2次元極座標系

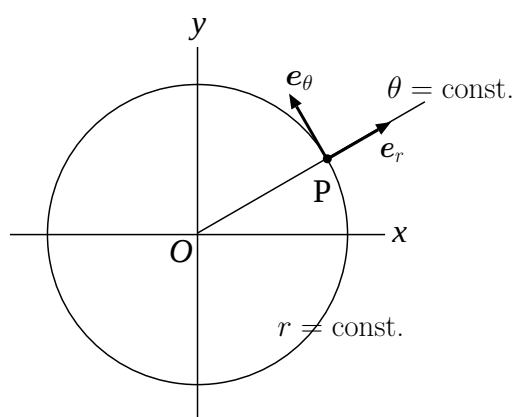


図 1.4. 2次元極座標系の座標.

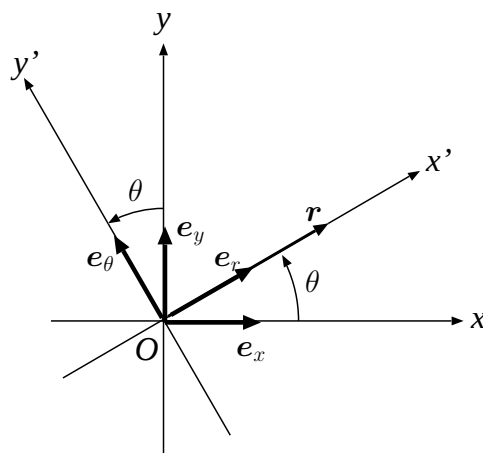


図 1.5. 2次元極座標系の基本ベクトル.

平面上の物体の運動を記述するのに極座標系を用いると便利ことがある. xy 平面上にある位置ベクトル $\mathbf{r}$ で表される点の位置を, 極座標 (r, θ) で表す. ここで, r は原点からその点までの距離を, θ は原点からその点へ引いた線分と x 軸の正の向きとのなす角である. その点のデカルト座標 (x, y) と極座標 (r, θ) の間には,

$$x = r \cos \theta, \quad y = r \sin \theta, \quad (1.7)$$

なる関係がある. $r = \text{一定}$ の曲線 (円) と $\theta = \text{一定}$ の曲線 (直線) の交点として, 極座標は定まる.

1.3.1 基本ベクトル

極座標系の座標軸として, 位置ベクトル $\mathbf{r}$ の方向に x' 軸を, $\mathbf{r}$ に垂直な方向に y' 軸をとる. そして, x' 軸, y' 軸方向の基本ベクトルをそれぞれ $\mathbf{e}_r, \mathbf{e}_\theta$ とする. この時, 位置ベクトルは

$$\mathbf{r} = r\mathbf{e}_r \quad (1.8)$$

と表される. 物体の運動にともない, 位置ベクトル $\mathbf{r}$ の向き (即ち θ) は時間的に変化するから, 基本ベクトル $\mathbf{e}_r, \mathbf{e}_\theta$ の向きも時間的に変化する.

デカルト座標系の基本ベクトル e_x, e_y と極座標系の基本ベクトル e_r, e_θ の間には,

$$e_r = e_x \cos \theta + e_y \sin \theta, \quad (1.9a)$$

$$e_\theta = -e_x \sin \theta + e_y \cos \theta, \quad (1.9b)$$

なる関係がある。この時、極座標系の基本ベクトル間のスカラー積は,

$$e_r \cdot e_r = e_\theta \cdot e_\theta = 1, \quad e_r \cdot e_\theta = 0, \quad (1.10)$$

となる。

(1.9) を逆に解くと,

$$e_x = e_r \cos \theta - e_\theta \sin \theta, \quad (1.11a)$$

$$e_y = e_r \sin \theta + e_\theta \cos \theta, \quad (1.11b)$$

となる。

1.3.2 基本ベクトルの時間微分

基本ベクトルの時間微分は,

$$\dot{e}_r = \dot{\theta} e_\theta, \quad (1.12a)$$

$$\dot{e}_\theta = -\dot{\theta} e_r, \quad (1.12b)$$

となる。

導出

まず, $\cos \theta, \sin \theta$ の時間微分について考える。 θ は時間 t の関数であるから, 合成関数の微分となる。

$$\frac{d}{dt}(\cos \theta) = \frac{d}{d\theta}(\cos \theta) \cdot \frac{d\theta}{dt} = -\dot{\theta} \sin \theta,$$

$$\frac{d}{dt}(\sin \theta) = \frac{d}{d\theta}(\sin \theta) \cdot \frac{d\theta}{dt} = \dot{\theta} \cos \theta.$$

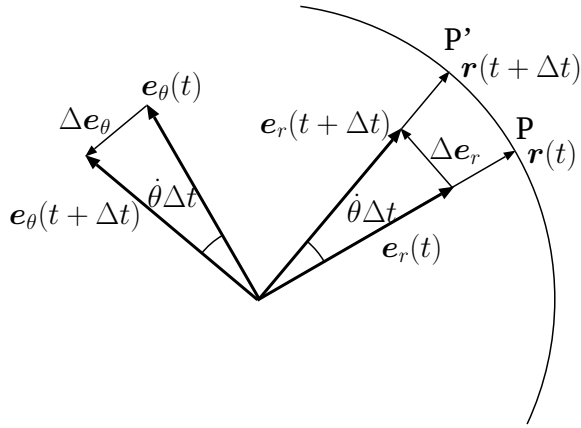
このことに留意すると, (1.9) の時間微分は以下のように計算される。

$$\dot{e}_r = e_x \frac{d}{dt}(\cos \theta) + e_y \frac{d}{dt}(\sin \theta) = \dot{\theta}(-e_x \sin \theta + e_y \cos \theta) = \dot{\theta} e_\theta,$$

$$\dot{e}_\theta = -e_x \frac{d}{dt}(\sin \theta) + e_y \frac{d}{dt}(\cos \theta) = -\dot{\theta}(e_x \cos \theta + e_y \sin \theta) = -\dot{\theta} e_r.$$

1.3.3 基本ベクトルの時間微分の意味

物体の運動に従い, 時刻 t での位置 P (位置ベクトル $\mathbf{r}(t)$) から, 微小時刻後 $t + \Delta t$ での位置 P' (位置ベクトル $\mathbf{r}(t + \Delta t)$) へ移動したとする。この時, 基本ベクトルの向きは, 動径方向はベクトル $e_r(t)$ から $e_r(t + \Delta t)$ に, 角方向はベクトル $e_\theta(t)$ から $e_\theta(t + \Delta t)$ に変化する。各基本ベクトルは, 角度 $\dot{\theta} \Delta t$ だけ回転する。ベクトル e_r, e_θ の変化は,



$$\Delta e_r = e_r(t + \Delta t) - e_r(t) = \dot{e}_r \Delta t,$$

$$\Delta e_\theta = e_\theta(t + \Delta t) - e_\theta(t) = \dot{e}_\theta \Delta t$$

で、それらの大きさの変化は e_r, e_θ が単位ベクトルであることより、 $|\dot{\theta} \Delta t|$ である。

$\Delta t \rightarrow 0$ の極限を取ると、 $\dot{e}_r, \dot{e}_\theta$ の大きさは $|\dot{\theta}|$ である。基本ベクトルの大きさは 1、即ち、

$$e_r \cdot e_r = e_\theta \cdot e_\theta = 1$$

であるが、これを微分すると、

$$e_r \cdot \dot{e}_r = e_\theta \cdot \dot{e}_\theta = 0$$

が得られる。即ち、 $\dot{e}_r$ は e_r に垂直、 $\dot{e}_\theta$ は e_θ に垂直となる。このことより、

$$\dot{e}_r = \alpha e_\theta, \quad \dot{e}_\theta = \beta e_r$$

と置ける。ここで、 α, β は t の何らかの関数とする。前スライドより、 $\dot{e}_r, \dot{e}_\theta$ の大きさは、 $|\dot{\theta}|$ となる。又、 $\Delta e_r, \Delta e_\theta$ の、 e_r, e_θ に対するその向きを考えると、 Δe_r は、 e_θ と同じ向き、 Δe_θ は e_r と逆向きである。これらのことから、 $\alpha = \dot{\theta}, \beta = -\dot{\theta}$ となる。以上より、基本ベクトルの時間微分は、(1.12) となる。

1.3.4 速度及び加速度の表式

基本ベクトルの時間微分 (1.12) より、速度及び加速度は以下のように表される。

$$\mathbf{v} = \dot{r} e_r + r \dot{\theta} e_\theta, \quad (1.13)$$

$$\mathbf{a} = (\ddot{r} - r \dot{\theta}^2) e_r + \frac{1}{r} \frac{d}{dt} (r^2 \dot{\theta}) e_\theta. \quad (1.14)$$

導出

位置ベクトル (1.8) を時間微分すると、速度 $\mathbf{v}$ が得られる。

$$\mathbf{v} = \dot{\mathbf{r}} = \frac{d}{dt} (r e_r) = \dot{r} e_r + r \dot{e}_r$$

ここで (1.12a) を適用すると、(1.13) に帰着する。

速度 (1.13) を時間微分すると、加速度 $\mathbf{a}$ が得られる。

$$\begin{aligned} \mathbf{a} &= \dot{\mathbf{v}} = \frac{d}{dt} (\dot{r} e_r + r \dot{\theta} e_\theta) \\ &= \ddot{r} e_r + \dot{r} \dot{e}_r + \frac{d}{dt} (r \dot{\theta}) e_\theta + r \dot{\theta} \dot{e}_\theta = \ddot{r} e_r + \dot{r} \dot{e}_r + (\dot{r} \dot{\theta} + r \ddot{\theta}) e_\theta + r \dot{\theta} \dot{e}_\theta \end{aligned}$$

ここで (1.12) を適用すると、

$$\mathbf{a} = \ddot{r} e_r + \dot{r} \dot{\theta} e_\theta + (\dot{r} \dot{\theta} + r \ddot{\theta}) e_\theta - r \dot{\theta}^2 e_r = (\ddot{r} - r \dot{\theta}^2) e_r + (r \ddot{\theta} + 2 \dot{r} \dot{\theta}) e_\theta$$

となる。右辺第 2 項を整理すると、(1.14) に帰着する。

1.3.5 用語

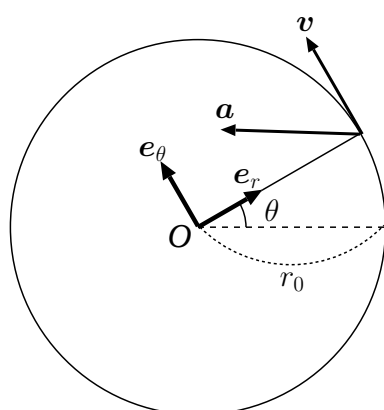


図 1.6. 2次元極座標系の円運動への適用.

基本ベクトル e_r の方向を動径方向, e_θ の方向を角方向という. 又, $\dot{r}$, $r\dot{\theta}$ をそれぞれ速度の動径成分, 角成分という. 同様に, $\ddot{r} - r\dot{\theta}^2$, $\frac{1}{r}\frac{d}{dt}(r^2\dot{\theta})$ をそれぞれ加速度の動径成分, 角成分という.

1.3.6 円運動への適用

円運動をする場合, 仮にその半径を r_0 とすると, $r = r_0$ は定数であるから, その時間微分は 0 ($\dot{r} = \ddot{r} = 0$) となる. この場合, 速度, 加速度の表式は,

$$\mathbf{v} = r_0\dot{\theta}\mathbf{e}_\theta,$$

$$\mathbf{a} = -r_0\dot{\theta}^2\mathbf{e}_r + r_0\ddot{\theta}\mathbf{e}_\theta,$$

となる. 速度は角成分のみを持ち, 円に接する.

円運動の場合, 角速度を定義できる. 速度の角成分の代わりに, 角速度を用いることがしばしばある.

角度 θ は, x 軸の正の向きから反時計回りにはかった位置ベクトルのなす角である.

時刻 Δt の間に, 角度 θ は $\Delta\theta$ だけ変化するとする. 角度 $\Delta\theta$ の円弧の長さは $r_0\Delta\theta$ であるから, この時刻の間に, 距離 $r_0\Delta\theta$ だけ移動する. よって, 速度の角成分 v は,

$$v = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} r_0 \frac{\Delta\theta}{\Delta t} = r_0\dot{\theta}$$

図 1.7. 円運動と角速度.

と表される. $\dot{\theta}$ は単位時間あたりの角度の変化を表し, 角速度と呼ばれる.

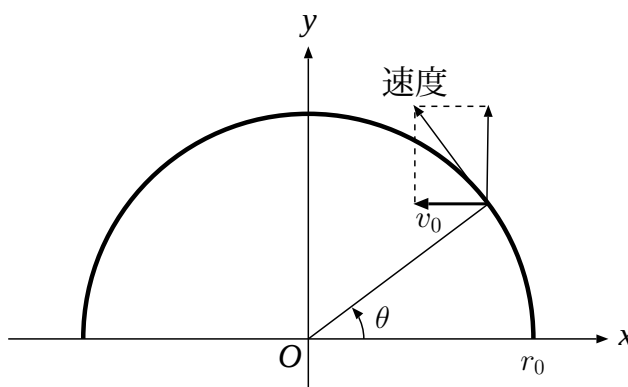
円運動への適用は「第 6 章 束縛運動」で取り上げる.

問題

1.3 質点が, xy 平面に置かれた半径 r_0 の半円周上を運動している. ここで, この点の x 軸への正射影点が, x 軸の負の向きに, 大きさ v_0 で等速度運動をする.

[1] x 軸の正の向きに対する質点の位置ベクトルがなす角を θ とした時, 質点の x 座標は $x = r_0 \cos \theta$ と表される. この時間微分が v_0 に等しいことを用いて, $\dot{\theta}$ を定数 r_0 , v_0 と変数 θ で表せ.

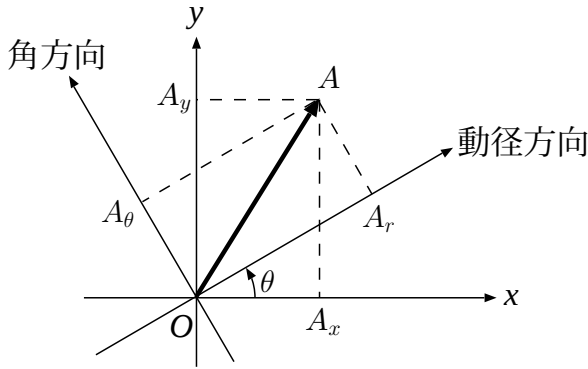
[2] 2次元極座標での加速度の動径成分 a_r , 角成分 a_θ を, 定数 r_0 , v_0 と変数 θ のみを用いて表せ.



1.3.7 円運動以外の運動への適用

「一般力学 II」の「万有引力のもとでの運動」, 「フーコーの振り子」で取り上げる.

1.3.8 任意のベクトルの成分の変換則



任意の2次元ベクトル $\mathbf{A}$ の、デカルト座標系に関する成分を (A_x, A_y) 、極座標系に関する成分を (A_r, A_θ) とおく。先に示した用語に従えば、 A_r は動径成分、 A_θ は角成分である。この時、

$$\mathbf{A} = A_x \mathbf{e}_x + A_y \mathbf{e}_y = A_r \mathbf{e}_r + A_\theta \mathbf{e}_\theta \quad (1.15)$$

である。 (A_r, A_θ) と (A_x, A_y) の変換の表式を求めたい。

(1.15) の両辺に対して、 $\mathbf{e}_r, \mathbf{e}_\theta$ とのスカラ積をとると、それぞれ、下式が得られる。

$$A_r = A_x \mathbf{e}_x \cdot \mathbf{e}_r + A_y \mathbf{e}_y \cdot \mathbf{e}_r,$$

$$A_\theta = A_x \mathbf{e}_x \cdot \mathbf{e}_\theta + A_y \mathbf{e}_y \cdot \mathbf{e}_\theta.$$

ここで、(1.9a), (1.9b) に対して、 $\mathbf{e}_x$ や $\mathbf{e}_y$ とのスカラ積をとった式から、

$$\mathbf{e}_x \cdot \mathbf{e}_r = \cos \theta, \quad \mathbf{e}_y \cdot \mathbf{e}_r = \sin \theta, \quad \mathbf{e}_x \cdot \mathbf{e}_\theta = -\sin \theta, \quad \mathbf{e}_y \cdot \mathbf{e}_\theta = \cos \theta, \quad (1.16)$$

が得られる。これらを適用すると、

$$A_r = A_x \cos \theta + A_y \sin \theta, \quad (1.17a)$$

$$A_\theta = -A_x \sin \theta + A_y \cos \theta, \quad (1.17b)$$

に帰着する。この式は、任意のベクトルの、デカルト座標系に関する成分 (A_x, A_y) と極座標系に関する成分 (A_r, A_θ) の間の変換則を与える。(1.17) を逆に解くと、

$$A_x = A_r \cos \theta - A_\theta \sin \theta, \quad (1.18a)$$

$$A_y = A_r \sin \theta + A_\theta \cos \theta, \quad (1.18b)$$

となる。

問題

1.4 任意のベクトル $\mathbf{A}$ を、

$$\mathbf{A} = A_r \mathbf{e}_r + A_\theta \mathbf{e}_\theta \quad (1.19)$$

のように、極座標系に関する成分で表すとする。ここで A_r, A_θ はそれぞれ $\mathbf{A}$ の動径成分、角成分である。この時、 $\mathbf{A}$ の時間微分の動径成分、角成分を求めよ。

1.3.9 速度及び加速度の動径成分・角成分の別の導出法

[1] 速度

変換則 (1.17) を用いて、速度の動径成分・角成分を導出する。

ベクトルとして速度を取り上げると、そのデカルト座標系に関する成分は $(\dot{x}, \dot{y})$ である。速度の動径成分、角成分をそれぞれ v_r, v_θ とおくと、(1.17) より、

$$v_r = \dot{x} \cos \theta + \dot{y} \sin \theta,$$

$$v_\theta = -\dot{x} \sin \theta + \dot{y} \cos \theta,$$

が成り立つ。ここで、(1.7) の時間微分より、

$$\dot{x} = \dot{r} \cos \theta - r\dot{\theta} \sin \theta, \quad (1.20a)$$

$$\dot{y} = \dot{r} \sin \theta + r\dot{\theta} \cos \theta, \quad (1.20b)$$

となる。これを適用すると、

$$v_r = (\dot{r} \cos \theta - r\dot{\theta} \sin \theta) \cos \theta + (\dot{r} \sin \theta + r\dot{\theta} \cos \theta) \sin \theta = \dot{r},$$

$$v_\theta = -(\dot{r} \cos \theta - r\dot{\theta} \sin \theta) \sin \theta + (\dot{r} \sin \theta + r\dot{\theta} \cos \theta) \cos \theta = r\dot{\theta},$$

となり、速度の動径成分が $\dot{r}$ 、角成分が $r\dot{\theta}$ となることが導かれる。

[2] 加速度

同様に、変換則 (1.17) を用いて、加速度の動径成分・角成分を導出する。

ベクトルとして加速度を取り上げると、そのデカルト座標系に関する成分は $(\ddot{x}, \ddot{y})$ である。加速度の動径成分、角成分をそれぞれ a_r, a_θ とおくと、(1.17) より、

$$a_r = \ddot{x} \cos \theta + \ddot{y} \sin \theta,$$

$$a_\theta = -\ddot{x} \sin \theta + \ddot{y} \cos \theta,$$

が成り立つ。ここで、(1.20) の時間微分より、

$$\ddot{x} = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2) \cos \theta - \frac{1}{r} \frac{d}{dt}(r^2\dot{\theta}) \sin \theta, \quad (1.21a)$$

$$\ddot{y} = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2) \sin \theta + \frac{1}{r} \frac{d}{dt}(r^2\dot{\theta}) \cos \theta, \quad (1.21b)$$

となる。これを適用すると、

$$a_r = \left[(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2) \cos \theta - \frac{1}{r} \frac{d}{dt}(r^2\dot{\theta}) \sin \theta \right] \cos \theta + \left[(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2) \sin \theta + \frac{1}{r} \frac{d}{dt}(r^2\dot{\theta}) \cos \theta \right] \sin \theta = \ddot{r} - r\dot{\theta}^2,$$

$$a_\theta = - \left[(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2) \cos \theta - \frac{1}{r} \frac{d}{dt}(r^2\dot{\theta}) \sin \theta \right] \sin \theta + \left[(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2) \sin \theta + \frac{1}{r} \frac{d}{dt}(r^2\dot{\theta}) \cos \theta \right] \cos \theta = \frac{1}{r} \frac{d}{dt}(r^2\dot{\theta}),$$

となり、加速度の動径成分が $\ddot{r} - r\dot{\theta}^2$ 、角成分が $\frac{1}{r} \frac{d}{dt}(r^2\dot{\theta})$ となることが導かれる。

問題

1.5 (1.20) の導出を確かめよ。

1.6 (1.21) の導出を確かめよ。

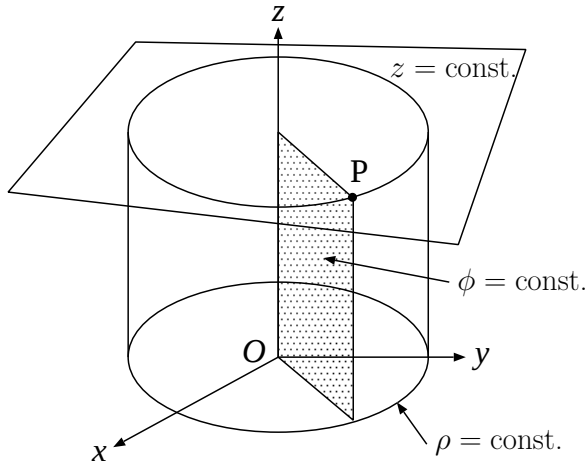


図 1.8. 円筒座標系の座標.

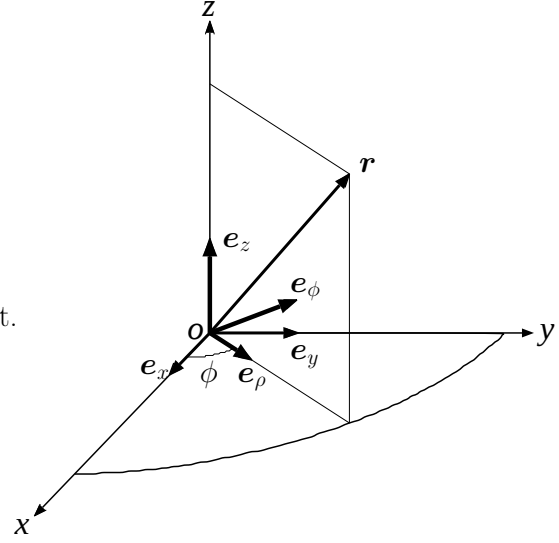


図 1.9. 円筒座標系の基本ベクトル.

1.4 円筒座標系

3次元的な物体の運動を記述するため、2次元極座標系を拡張した、円筒座標系について説明する．円筒座標系では、3次元空間の点 $\mathbf{r} = (x, y, z)$ を、

$$x = \rho \cos \phi, \quad y = \rho \sin \phi, \quad z = z, \quad (1.22)$$

のように、座標 (ρ, ϕ, z) で表す． $\rho = \text{一定}$ の曲面（円柱）， $\phi = \text{一定}$ の曲面（平面）， $z = \text{一定}$ の曲面（平面）の交点として、円筒座標は定まる．

円筒座標系の基本ベクトルは、2次元極座標系の基本ベクトルに、デカルト座標系の z 軸方向の基本ベクトルを組み合わせた、 $\{\mathbf{e}_\rho, \mathbf{e}_\phi, \mathbf{e}_z\}$ で構成される．これは次のように定義する．位置ベクトル $\mathbf{r}$ を xy 平面上へ射影したベクトルを $\boldsymbol{\rho}$ とおく． $\boldsymbol{\rho}$ 方向の単位ベクトルを $\mathbf{e}_\rho$ とする． xy 平面上にあり $\mathbf{e}_\rho$ に垂直なベクトルを $\mathbf{e}_\phi$ とする． z は z 軸方向の単位ベクトルである．

デカルト座標系の基本ベクトルと円筒座標系の基本ベクトルの間には、

$$\mathbf{e}_\rho = \mathbf{e}_x \cos \phi + \mathbf{e}_y \sin \phi, \quad (1.23a)$$

$$\mathbf{e}_\phi = -\mathbf{e}_x \sin \phi + \mathbf{e}_y \cos \phi, \quad (1.23b)$$

$$\mathbf{e}_z = \mathbf{e}_z, \quad (1.23c)$$

なる関係がある．

$\mathbf{e}_\rho, \mathbf{e}_\phi, \mathbf{e}_z$ はそれぞれ、右手の親指、人差し指、中指の向きになるように決められており、右手系をなす．従って、基本ベクトル同士のベクトル積は以下の関係となる．

$$\mathbf{e}_\rho \times \mathbf{e}_\phi = \mathbf{e}_z, \quad \mathbf{e}_\phi \times \mathbf{e}_z = \mathbf{e}_\rho, \quad \mathbf{e}_z \times \mathbf{e}_\rho = \mathbf{e}_\phi,$$

円筒座標系では、位置ベクトルは、

$$\mathbf{r} = \rho \mathbf{e}_\rho + z \mathbf{e}_z \quad (1.24)$$

と表される。これを時間微分すると速度の表式,

$$\mathbf{v} = \dot{\rho}\mathbf{e}_\rho + \rho\dot{\phi}\mathbf{e}_\phi + \dot{z}\mathbf{e}_z \quad (1.25)$$

が得られる。これを更に時間微分すると加速度の表式,

$$\mathbf{a} = (\ddot{\rho} - \rho\dot{\phi}^2)\mathbf{e}_\rho + \frac{1}{\rho}\frac{d}{dt}(\rho^2\dot{\phi})\mathbf{e}_\phi + \ddot{z}\mathbf{e}_z \quad (1.26)$$

が得られる。

問題

1.7 質点の位置がデカルト座標系において,

$$x = a \cos \omega t, \quad y = a \sin \omega t, \quad z = v_0 t, \quad (1.27)$$

で与えられる運動はどのような運動か説明せよ。又、これを円筒座標で表わすとどのように表されるのか示せ。ここで、 a, ω, v_0 は全て正の定数とする。

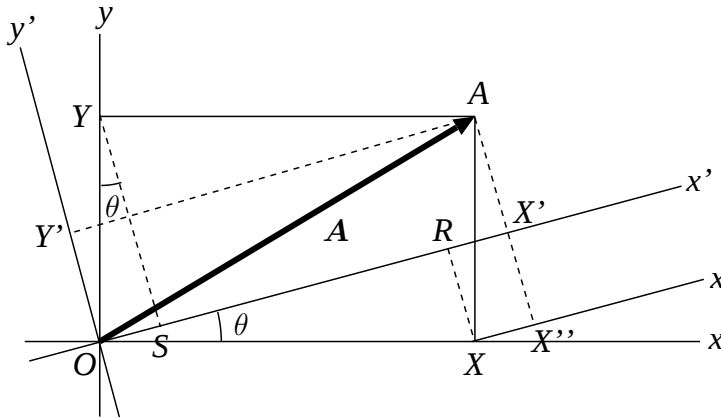
付 録 1.A 2次元極座標系における任意のベクトルの成分の変換則

任意の2次元ベクトル $\mathbf{A}$ の、デカルト座標系に関する成分を (A_x, A_y) と極座標系に関する成分 (A_r, A_θ) の間には,

$$A_r = A_x \cos \theta + A_y \sin \theta, \quad (1.17a)$$

$$A_\theta = -A_x \sin \theta + A_y \cos \theta, \quad (1.17b)$$

なる関係がある。このことを幾何学的に示す。



原点を O 、ベクトル $\mathbf{A}$ の終点を点 A とし、線分 OA の x 軸、 y 軸への正射影（すなわち $\mathbf{A}$ の x 成分、 y 成分）をそれぞれ OX, OY とする。

$$OX = A_x, \quad OY = A_y$$

又、線分 OA の x' 軸、 y' 軸への正射影（すなわち、 $\mathbf{A}$ の動径成分、角成分）をそれぞれ OX', OY' とする。

$$OX' = A_r, \quad OY' = A_\theta$$

最初に、動径成分について導出する。まず、線分 OX の x' 軸への正射影を OR 、線

分 OY の x' 軸への正射影を OS とする。

$$OR = OX \cos \theta = A_x \cos \theta, \quad OS = OY \sin \theta = A_y \sin \theta$$

この時、

$$OX' = OR + RX'$$

である。一方、

$$OS = OY \sin \theta = XA \sin \theta$$

である。ここで、点 X を始点として、 x' 軸に平行に直線を引き、線分 XA のこの直線への正射影を線分 XX'' とすると、 $RX' = XX''$ であるから、

$$XA \sin \theta = XX'' = RX'$$

となる。以上より、 $RX' = OS$ となるから、

$$A_r = OX' = OR + OS = A_x \cos \theta + A_y \sin \theta$$

となる。

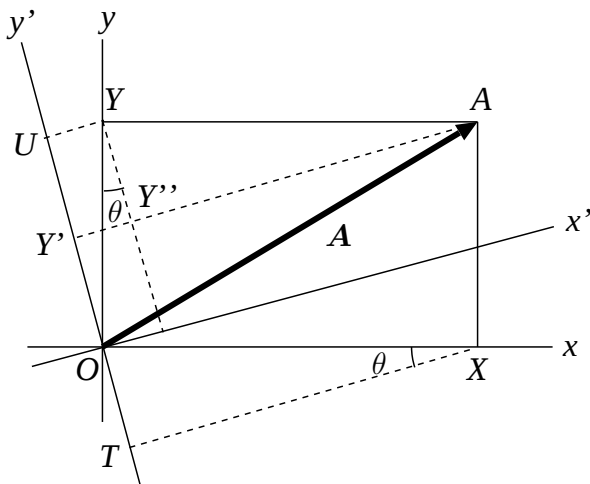
次に、角成分について導出する。まず、線分 OX の y' 軸への正射影を OT、線分 OY の y' 軸への正射影を OU とする。

$$OT = OX \sin \theta = A_x \sin \theta, \quad OU = OY \cos \theta = A_y \cos \theta$$

この時、

$$OY' = OU - UY'$$

である。



点 Y を始点として、 y' 軸に平行に直線を引き、線分 YA のこの直線への正射影を線分 YY'' とすると、 $UY' = YY''$ であるから、

$$YA \sin \theta = YY'' = UY'$$

となる。

一方、

$$OT = OX \sin \theta = YA \sin \theta$$

である。

以上より、 $UY' = OT$ となるから、

$$A_\theta = OY' = OU - OT = A_y \cos \theta - A_x \sin \theta$$

となる。

第2章 質点力学

本章から実際の力学の問題に入る．まず最初に力学の基本法則（ニュートンの運動の法則）について説明する．この法則の第2法則（運動の法則）は，運動方程式として定式化される．運動方程式は数学的には常微分方程式である．従って，物体の運動を求めるとは，この常微分方程式を解くことにほかならない．いくつかの問題を通して，1階常微分方程式としての運動方程式の解法を学ぶことにする．

なお，本章で対象とする物体は，質点である．質点とは物体の大きさを無視して点とし，その質量だけを物体の属性と考える概念である．質点に対する概念として剛体がある．剛体の力学については「一般力学II」で取り扱う．

2.1 一般法則

2.1.1 ニュートンの法則

物体の運動を支配する力学の基本的な法則は，以下の3法則にまとめられる．

1. 慣性の法則

外部から力が作用しない場合，物体は初期に静止していた場合は静止を，初期にある速度で運動していた場合はその速度で等速度運動を続ける．

慣性とは，初期に物体がある速度で運動をしていた時，その速度を維持して運動し続ける性質のことである．

2. 運動の法則

外部から力が作用した場合，物体は，その力の向きに力の大きさに比例する加速度を持つ．

運動の法則は，運動方程式として，式の形で定式化される．運動の法則は慣性の法則をその特殊な場合として含む．

3. 作用・反作用の法則

2つの物体が互いに力を及ぼし合う時，これら2つの力の大きさは等しく，向きは反対である．

作用・反作用の法則は，物体に作用する力を考える場合に重要で，運動方程式を定式化する場合にしばしば応用される．

2.1.2 運動方程式

物体（質点）の質量を m ，位置ベクトルを $\mathbf{r}$ ，作用する力のベクトルを $\mathbf{F}$ とした時，運動の法則は以下のように表される．これを運動方程式という．

$$m\ddot{\mathbf{r}} = m\dot{\mathbf{v}} = \mathbf{F}. \quad (2.1)$$

一般に，力の作用によって，速さ $|\mathbf{v}|$ が変わると同時に，運動の向き（ベクトル $\mathbf{v}$ の向き）も変化する．

力 $\mathbf{F}$ がわかっていれば、与えられた初期条件のもとで、常微分方程式 (2.1) の解として、物体の運動は一意に決まる。 $\mathbf{F}$ が速度のみに依存する場合、運動方程式は、速度を従属変数とした 1 階の常微分方程式となる（例えば、問題 2.4, 2.5）。一方、 $\mathbf{F}$ が座標にも依存する場合、運動方程式は、座標を従属変数とした 2 階の常微分方程式となる（例えば、第 7 章で扱う単振動の (7.4) 式）。

特に、 $\mathbf{F} = \mathbf{0}$ の場合（自由運動の場合）が慣性の法則に対応する。

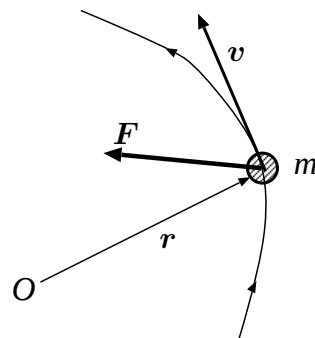


図 2.1: 運動の法則

2.2 質量と力

2.2.1 慣性質量の決め方

天秤のような測器で測ったものは、力学では、重力質量と呼ばれるものである。これが、運動方程式に現れる質量（慣性質量）と同じかどうか、確かではないからである。以下、このことを考察する。

質量 m の質点が力 F_x を受けて x 軸上を運動する。この時、この質点の運動方程式は、

$$m\ddot{x} = F_x \quad (2.2)$$

となる。ここで質量は、慣性質量と考える。慣性質量とは、運動方程式 (2.2) の左辺の加速度項の比例係数である。質点に 1 N の大きさの力を作用させた時、 1 m/s^2 の加速度が生じたとすると、その質点の慣性質量は 1 kg と定義される。

この定義では、慣性質量の定義に先立って、力の大きさの定義がなされている必要があるので、不完全である。力を定義するには、その前に、質量を定義する必要がある。

ニュートンの第 3 法則（作用・反作用の法則）を使って、2 つの物体の運動から力を消去した問題を立ててみる。慣性質量 m_1 の質点 1 と慣性質量 m_2 の質点 2 は内力（作用・反作用の関係にある力）のみを受けて、 x 軸上を運動するとする。質点 2 が質点 1 に及ぼす力の大きさを F_{12} とすると、質点 1 が質点 2 に及ぼす力は大きさが同じで、向きは反対となる。この場合、質点 1, 2 の運動方程式は、それぞれ、

$$m_1\ddot{x}_1 = F_{12}, \quad (2.3a)$$

$$m_2\ddot{x}_2 = -F_{12}, \quad (2.3b)$$

となる。ここで、質点 1, 2 の座標をそれぞれ x_1, x_2 とした。(2.3a)+(2.3b) より、

$$m_1\ddot{x}_1 = -m_2\ddot{x}_2 \quad (2.4)$$

となり、力を消去することができる。2 つの質点の加速度を計測すれば、質量比 m_2/m_1 を決めることができる。そこで、例えば、質点 1 の質量を単位質量と定めれば、質点 2 の慣性質量が決まる。

慣性質量は、慣性が維持される程度を定量的に表す指標となる。物体に力が与えられた時、初期の速度から速度が変化しようとするが、質量が大きい程、速度の変化は抑えられ、慣性が維持される程度が強くなる。

2.2.2 力

前小節のようにして慣性質量が定まれば、力の単位を決めることができる。単位質量の質点に 1 m/s^2 の加速度を引き起こす力の大きさを 1 N と定める。

2.2.3 慣性質量と重力質量

自由落下の問題を考える。

座標 z を鉛直上向きにとる。質量 m の質点に作用する力は重力のみとする。この時、この質点の運動方程式は、重力定数を g とした時、

$$m\ddot{z} = -m_g g \quad (2.5)$$

となる。ここで、質量を、慣性質量 m と重力質量 m_g に区別した。慣性質量は前節で定義した。重力質量は、(2.5) 右辺の重力の比例係数で、天秤を使って、基準となる物体との質量を比較することで決めることができる。問題は、慣性質量と重力質量が等しいかどうかということである。この問題は、古くはニュートンが振り子の問題を使って検証し、誤差 10^{-3} で一致することを示した。1890 年に Eotvos はある装置を用いてこの問題を検証し、重力質量と慣性質量の比 $k = m_g/m$ が物質によらず一定値となることを示した。1959 年に Dicke らは、アルミニウムと金について比 k が異なるかを調べた。そして、アルミニウムについての比を $k(Al)$ 、金についての比を $k(Au)$ とおいた時、

$$\frac{k(Al)}{k(Au)} = 1 + \eta$$

で定義される η の値が $|\eta| < 3 \times 10^{-11}$ となることを確かめた。

以上のことから、実験的には、物質によらず、慣性質量と重力質量は等しいことが示されたと言える。

参考文献

エルンスト・マッハ: 「マッハ力学: 力学の批判的発展史」, 伏見譲訳, 講談社 (1969).

ジェリー・B・マリオン: 「力学 I」, 伊原千秋訳, 紀伊国屋書店 (1972).

内山龍雄: 「相対性理論」, 岩波書店 (1977).

2.3 問題の定式化

2.3.1 座標系の選択

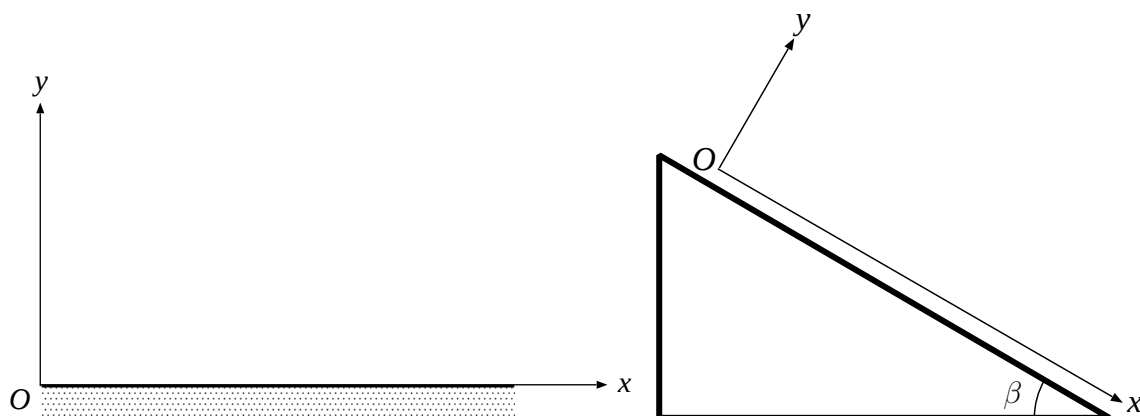


図 2.2. 座標系の選択の例. (a) 水平面の場合.

(b) 斜面の場合.

運動方程式を書き下す場合、座標系を選択しなければならない。座標系は、常微分方程式としての運動方程式が解きやすくなるようなものを選ぶのが良い。座標系として、デカルト座標系（本節）と 2 次元極座標系（第 6 章参照）、円筒座標系を取りあげる。

デカルト座標系を用いる場合でも、原点の位置と座標軸の向きを決めなければならない。ここで座標軸の向きは、右手系をなすように選ぶ (x, y, z 軸の正の向きが、右手の親指、人差し指、中指の向き)。

例えば、水平右向きに x 軸、鉛直上向きに y 軸、紙面に垂直で内から外へ向かう向きに z 軸をとる (図 2.2(a))。斜面上の運動の場合、斜面に平行に x 軸、斜面に垂直に y 軸を選ぶ (同図 (b))。

2.3.2 作用する力の例

物体に作用する力には、重力、摩擦力、抵抗力、垂直抗力 (面の上を運動する場合)、張力 (糸に結ばれている場合)、バネの復元力 (バネで結ばれている場合) 等がある。

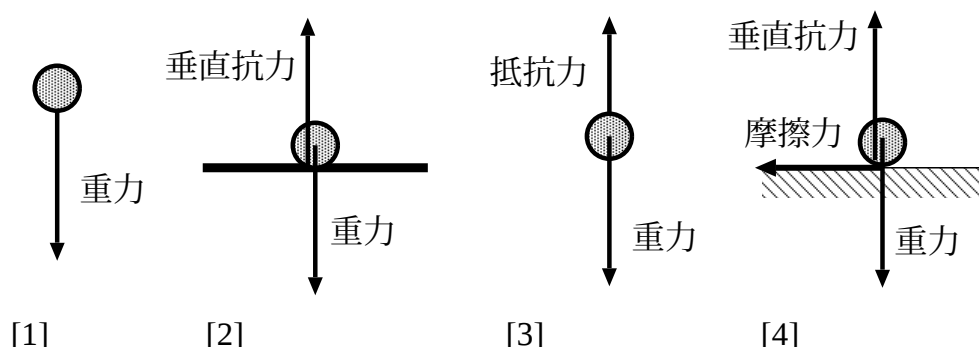


図 2.3. 物体に作用する力の例.

[1] 重力

重力は、空間的に一様で、鉛直下向きに作用する。質量を m 、重力定数を g とすると、重力の大きさは mg である。

[2] 垂直抗力

質量 m の質点が水平面に載っているとすると、この質点には鉛直下向きに mg の大きさの重力が作用し、この大きさで水平面を押すが、その反作用として、水平面から同じ大きさ mg で向きは反対の鉛直上向きに垂直抗力を受ける。

質点が斜面上に載っている場合は、垂直抗力は斜面に垂直な向きに作用する。

[3] 抵抗力

空気中を質点が運動する場合には、流体の粘性による抵抗力を受ける。抵抗力は運動する向きと逆向きに作用し、その大きさは速度の関数となる。速度が小さい場合は、速度に比例すると考えてよいが、速度が大きい場合は、速度の 2 乗に比例すると考える。

[4] 摩擦力

質点が粗い水平面又は斜面上を運動する場合、動摩擦力を受ける。動摩擦力は運動する向きとは逆向きに作用する。その大きさは、面から受ける垂直抗力を R 、面の性質である動摩擦係数を μ' とした時、 $\mu'R$ と表される。

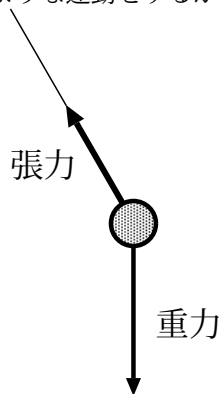
粗い面に質点が置かれている場合、質点が静止している場合でも摩擦力は作用する。今、粗い面に置かれた質点に大きさ W の外力を作用させた時、質点は静止しているとすると、この場合、質点には作用させた外力とは逆向きに、大きさ F の摩擦力が作用し、両者はつりあっている ($F = W$) と考える。面から受け

る垂直抗力を R , 面の静止摩擦係数を μ とした時, 最大摩擦力は μR となる. 一般には摩擦力は最大摩擦
力より小さい ($F \leq \mu R$). 最大摩擦力より大きい $W > \mu R$ なる外力を与えた場合, 質点は運動を始める.

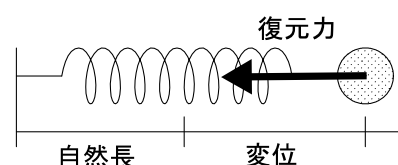
面が滑らかと言った場合は, 摩擦力は作用しないを考える. 一方, 面が粗いと言った場合は, 摩擦力が作
用すると考える.

[5] 張力

質点が糸に結ばれている場合, 糸の方向に張力が作用する. 張力の大きさは, 他にどのような力が作用
しているか, どのような運動をするかで決まる. その大きさを決める一般的な表式はない.



[5]



[6]

図 2.4. 物体に作用する力の例 (続き).

[6] バネの復元力

バネの自然長に対して, x だけバネを変位させた場合, 比例定数を k として, 変位に比例した kx なる
大きさの復元力 (自然長に戻ろうとする力) が作用する. この比例定数をバネ定数という.

ただし, 復元力が変位に比例するのは, 変位が自然長と比べて小さい場合 (即ち, 線形なバネの場合) に
限られる. 変位が大きい場合, 復元力は, a を定数として, $-kx - ax^3$ のように, 変位の 3 乗の項 (非線
形項) も考える必要がある. 線形なバネの場合, 解の重ね合わせの原理が成り立つ. このことは第 7 章で
ふれる.

2.3.3 運動方程式の定式化

2.3.3.1 デカルト座標系での表示

デカルト座標系の場合, 運動方程式 (2.1) を成分で表すと以下のようなになる.

$$m\ddot{x} = m\dot{v}_x = F_x, \quad (2.6a)$$

$$m\ddot{y} = m\dot{v}_y = F_y, \quad (2.6b)$$

$$m\ddot{z} = m\dot{v}_z = F_z. \quad (2.6c)$$

ここで, (x, y, z) は質点のデカルト座標である. 又, $(v_x, v_y, v_z) = (\dot{x}, \dot{y}, \dot{z})$ は速度 $\mathbf{v}$ の, (F_x, F_y, F_z) は力
 $\mathbf{F}$ の, デカルト座標系に関する成分である.

2.3.3.2 2次元極座標系での表示

r を原点から質点までの距離, θ を, 原点と質点を結ぶ線分が x 軸の正の向きに対するなす角とする. 2次元極座標系では, 加速度は (1.14) のように表されるから, 運動方程式は以下の形となる.

$$m(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2) = F_r, \quad (2.7a)$$

$$m\frac{1}{r}\frac{d}{dt}(r^2\dot{\theta}) = F_\theta. \quad (2.7b)$$

ここで F_r, F_θ は, それぞれ, 力の動径成分, 角成分である.

具体的な運動への2次元極座標系の適用は, 「第6章 束縛運動」, 「中心力による運動」(「一般力学II」) で取りあげる.

2.4 運動方程式の解法: 加速度が一定の場合

作用する力が一定の場合, 運動方程式は, 時間積分することにより, 解くことができる. そのような解法を, 問題を通して確認する.

以下の問題では, 鉛直下方に一様な重力が働いている. 重力定数は g とする.

例題

2.1 速度 v_0 で水平方向と θ_0 の角度をなす方向に投げ上げられた質点の, 時間 t 後の位置を求めよ. ただし, $t = 0$ で質点は原点にあるとする.

【解答】

[1] 座標系

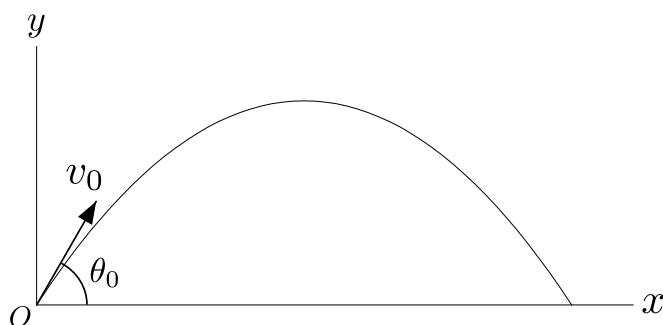


図 2.5.

物体を投射する点を原点 O とし, 水平右向きに x 軸, 鉛直上向きに y 軸をとる. 図の矢印は速度ベクトルの初期条件を示す.

[2] 運動方程式

重力以外の外力が作用していない場合, 質点の運動方程式は, 座標 x, y を従属変数とする, 2階の常微分方程式として表され,

$$m\ddot{x} = 0, \quad (2.8a)$$

$$m\ddot{y} = -mg, \quad (2.8b)$$

となる.

[3] 初期条件

力学の問題では必ず初期条件が存在し, 初期条件を満足する解を求めることになる.

題意より, 時刻 $t = 0$ における初期条件は, 速度に関しては,

$$\dot{x} = v_0 \cos \theta_0, \quad \dot{y} = v_0 \sin \theta_0, \quad (2.9)$$

座標に関しては,

$$x = y = 0, \quad (2.10)$$

である.

[4] 速度の解

力が作用しない場合, 又は, 作用してもその力が一定の場合, 運動方程式を単純に積分することで解を求める.

(2.8a) の両辺を m で割り, 時間について積分すると,

$$\dot{x} = C \quad (2.11)$$

となる. ここで C は積分定数である. 初期条件 (2.9) を適用すると, 積分定数は,

$$C = v_0 \cos \theta_0$$

と定まる. 従って, 任意の t における速度の x 成分は,

$$\dot{x} = v_0 \cos \theta_0$$

となる. 同様に, (2.8b) の両辺を m で割り, 時間について積分すると,

$$\dot{y} = - \int g dt = -gt + D \quad (2.12)$$

となる. ここで D は積分定数である. 初期条件 (2.9) を適用すると, 積分定数は,

$$D = v_0 \sin \theta_0$$

と定まる. 従って, 任意の t における速度の y 成分は,

$$\dot{y} = -gt + v_0 \sin \theta_0$$

となる. 以上をまとめて記す.

$$\dot{x} = v_0 \cos \theta_0, \quad (2.13a)$$

$$\dot{y} = -gt + v_0 \sin \theta_0, \quad (2.13b)$$

[5] 座標の解

(2.13a) を時間について積分すると,

$$x = \int v_0 \cos \theta_0 \cdot dt = v_0 \cos \theta_0 \cdot t + x_0 \quad (2.14)$$

となる. ここで x_0 は積分定数である. 初期条件 (2.10) を適用すると, 積分定数は,

$$x_0 = 0$$

と定まる. 従って, 任意の t における座標 x は,

$$x = v_0 \cos \theta_0 \cdot t$$

となる。同様に、(2.13b) を時間について積分すると、

$$y = \int (-gt + v_0 \sin \theta_0) dt = -\frac{1}{2}gt^2 + v_0 \sin \theta_0 \cdot t + y_0 \quad (2.15)$$

となる。ここで y_0 は積分定数である。初期条件 (2.10) を適用すると、積分定数は、

$$y_0 = 0$$

と定まる。従って、任意の t における座標 y は、

$$y = -\frac{1}{2}gt^2 + v_0 \sin \theta_0 \cdot t$$

となる。以上をまとめて記す。

$$x = v_0 \cos \theta_0 \cdot t \quad (2.16a)$$

$$y = -\frac{1}{2}gt^2 + v_0 \sin \theta_0 \cdot t \quad (2.16b)$$

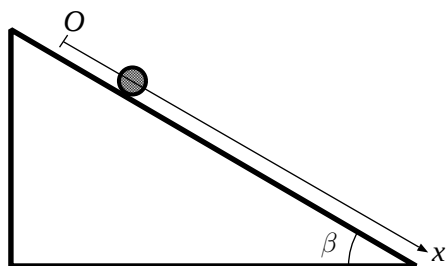
[6] 軌道

解 (2.16a), (2.16b) から時間 t を消去すると、

$$y = -\frac{1}{2}g \left(\frac{x}{v_0 \cos \theta_0} \right)^2 + \tan \theta_0 \cdot x$$

となる。これは放物線である。図 2.5 に軌道を示す。

問題



2.2 図に示すように、水平面に対して角度 β をなす滑らかな斜面上に、質量 m の質点をおく。この時、時刻 t における質点の x 座標を求めたい。ただし、 x 軸は、初期に質点を置いた位置を原点として、斜面に沿って、斜面を下る向きを正の向きとしてとる。

[1] 運動方程式を示せ。

[2] 運動方程式を時間に関して積分することで、時刻 t における速度を求めよ。ただし、初速度は 0 とする。

[3] 問 [2] の結果を時間に関して積分することで、時刻 t における座標を求めよ。

2.3 問題 2.2 と同様であるが、ただし、斜面は粗いと仮定する。斜面の動摩擦係数は μ' とする。この場合について、問題 2.2 と同じ設問について答えよ。

2.5 運動方程式の解法: 加速度が一定でない場合

加速度が一定でない場合、単純に時間積分することで運動方程式を解くことはできない。この場合には、常微分方程式としての運動方程式を解くことが必要となる。本節では、作用する力は速度のみの関数とし、運動方程式は、速度を従属変数とした一階の常微分方程式となる場合を考える。一階の常微分方程式は変数分離法により解く。

変数分離法による解法は、第 0 章の「0.2.2 1 階常微分方程式」で説明した。ここではその結果を使い、解法にはふれない。

例題

2.4 例題 2.1 と同様であるが、質点の速度に比例する空気抵抗が作用する場合はどうなるか。

【解答】

[1] 座標系

例題 2.1 と同様にとる。

[2] 運動方程式

速度の x, y 成分をそれぞれ $v_x = \dot{x}$, $v_y = \dot{y}$ とおく。抵抗の比例係数を γ とおくと、運動方程式は、 v_x, v_y を従属変数とする、1 階の常微分方程式として表され、

$$m\dot{v}_x = -\gamma v_x,$$

$$m\dot{v}_y = -mg - \gamma v_y,$$

となる。以下では表記を簡潔にするため、運動方程式の両辺を m で割っておき、抵抗係数を

$$k = \frac{\gamma}{m}$$

の形で再定義しておく。この場合、運動方程式は、

$$\dot{v}_x = -kv_x, \quad (2.17a)$$

$$\dot{v}_y = -g - kv_y, \quad (2.17b)$$

と書き換えられる。物体の座標は、方程式

$$\dot{x} = v_x, \quad (2.18a)$$

$$\dot{y} = v_y, \quad (2.18b)$$

より求まる。

[3] 初期条件

問題 2.1 と同じである。

[4] 解法の手順

最初に、1 階の常微分方程式としての運動方程式 (2.17) を解き、速度 (v_x, v_y) の解を求める。次に、この解を (2.18) に代入し、時間について積分することで、座標 (x, y) を求める。

[5] 運動方程式の x 成分の解

第 0.2.2 節の例題 0.13 と同様の解法より, 1 階の常微分方程式 (2.17a) の一般解は,

$$v_x = Ce^{-kt} \quad (2.19)$$

となる. ここで C は任意定数である.

初期条件は $t = 0$ で $v_x = v_0 \cos \theta_0$ であるから, これを (2.19) に適用すると, 任意定数が $C = v_0 \cos \theta_0$ のように決まる. 従って, この初期条件を満たす v_x の解は,

$$v_x = v_0 \cos \theta_0 \cdot e^{-kt} \quad (2.20)$$

となる. なお, 初期条件を適用して, 任意定数に特定の値を与えた解は, **特解**と呼ぶ.

[6] 運動方程式の y 成分の解

第 0.2.2 節の問題 0.14(i) と同様の解法より, 1 階の常微分方程式 (2.17b) の一般解は,

$$v_y = De^{-kt} - \frac{g}{k} \quad (2.21)$$

となる. ここで D は任意定数である.

初期条件は $t = 0$ で $v_y = v_0 \sin \theta_0$ であるから, これを (2.21) に適用すると,

$$v_0 \sin \theta_0 = D - \frac{g}{k}$$

より, 任意定数が,

$$D = \frac{g}{k} + v_0 \sin \theta_0$$

のように決まる. 従って, この初期条件を満たす v_y の解は,

$$v_y = \left(\frac{g}{k} + v_0 \sin \theta_0 \right) e^{-kt} - \frac{g}{k} \quad (2.22)$$

となる.

[7] 座標の計算

以上得られた解 (2.20), (2.22) を (2.18) に適用する.

$$\dot{x} = \frac{dx}{dt} = v_0 \cos \theta_0 e^{-kt}, \quad (2.23a)$$

$$\dot{y} = \frac{dy}{dt} = \left(\frac{g}{k} + v_0 \sin \theta_0 \right) e^{-kt} - \frac{g}{k}, \quad (2.23b)$$

まず, (2.23a) を積分する.

$$x = v_0 \cos \theta_0 \int e^{-kt} dt = -\frac{v_0}{k} \cos \theta_0 e^{-kt} + x_0$$

ここで x_0 は任意定数である. $t = 0$ で $x = 0$ なる初期条件を適用すると,

$$0 = -\frac{v_0}{k} \cos \theta_0 + x_0$$

より,

$$x_0 = \frac{v_0}{k} \cos \theta_0$$

と決まる。従って、与えられた初期条件を満たす解は、

$$x = \frac{v_0}{k} \cos \theta_0 (1 - e^{-kt})$$

となる。

次に、(2.23b) を積分する。

$$y = \int \left[\left(\frac{g}{k} + v_0 \sin \theta_0 \right) e^{-kt} - \frac{g}{k} \right] dt = -\frac{1}{k} \left(\frac{g}{k} + v_0 \sin \theta_0 \right) e^{-kt} - \frac{g}{k} t + y_0$$

ここで y_0 は任意定数である。 $t = 0$ で $y = 0$ なる初期条件を適用すると、

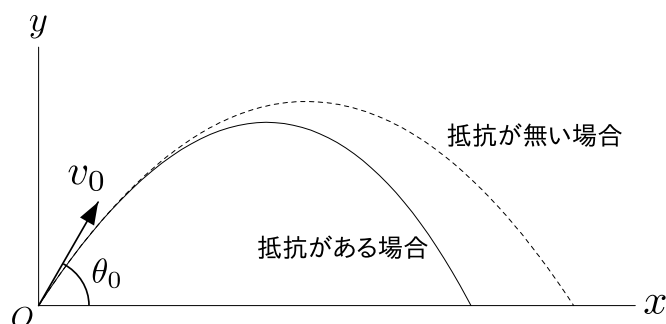
$$0 = -\frac{1}{k} \left(\frac{g}{k} + v_0 \sin \theta_0 \right) + y_0$$

より、

$$y_0 = \frac{1}{k} \left(\frac{g}{k} + v_0 \sin \theta_0 \right)$$

と決まる。従って、与えられた初期条件を満たす解は、

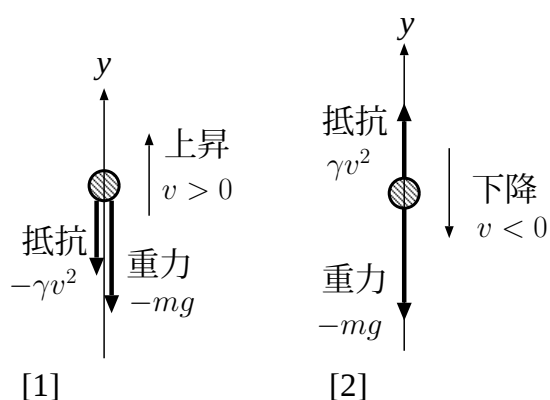
$$y = \frac{1}{k} \left(\frac{g}{k} + v_0 \sin \theta_0 \right) (1 - e^{-kt}) - \frac{g}{k} t$$



となる。

[8] 軌道

左図の実線に軌道を示す。比較のため、抵抗のない場合（放物線運動の場合）の軌道を点線で示す。抵抗の作用のため、水平方向にも、鉛直方向にも短い距離しか到達できない。



例題

2.5 空気抵抗が質点の速度の2乗に比例するとすると仮定する。

[1] 初速度 v_0 で鉛直上方に投げ上げられた質点の、時刻 t における速度を求めよ。

[2] 初速度 0 で鉛直下方に落下する質点の、時刻 t における速度を求めよ。

【解答】

鉛直上向きを y 軸の正の向きにとり、 v をこの向きの速度成分とする。物体が上昇する場合、即ち、 $v > 0$ の場合、抵抗は速度と逆向き、すなわち、負の向き（下向き）に作用する。一方、物体が下降する場合、即ち、 $v < 0$ の場合、抵抗は速度と逆向きであるから、正の向き（上向き）に作用する。従って、運動方程式は、

$$m\dot{v} = -mg - \gamma|v|v$$

と表すことができる．以下では表記を簡潔にするため，運動方程式の両辺を m で割っておき，抵抗係数を

$$k = \frac{\gamma}{m}$$

の形で再定義しておく．

$$\dot{v} = -g - k|v|v \quad (2.24)$$

[1] $v > 0$ の場合の運動方程式は，(2.24) の絶対値をはずすと，

$$\dot{v} = -g - kv^2 \quad (2.25)$$

となる．第 0.2.2 節の例題 0.15 と同様の解法より，1 階の常微分方程式 (2.25) の一般解は，

$$v = \sqrt{\frac{g}{k}} \tan(-\sqrt{kg}t + C) = \sqrt{\frac{g}{k}} \frac{\tan C - \tan \sqrt{kg}t}{1 + \tan C \tan \sqrt{kg}t} \quad (2.26)$$

となる．

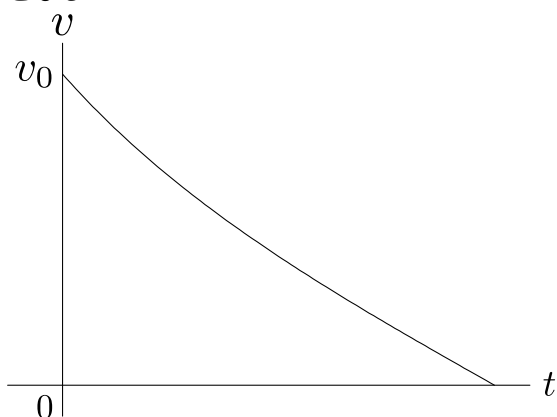


図 2.6. 問題 2.5[1], 速度 v の時間依存性.

初期条件は $t = 0$ で $v = v_0$ であるから，これを (2.26) に適用すると，

$$v_0 = \sqrt{\frac{g}{k}} \tan C$$

となる．これを (2.26) に代入すると，初期条件を満たす速度の解が，

$$v = \sqrt{\frac{g}{k}} \frac{\sqrt{\frac{k}{g}}v_0 - \tan \sqrt{kg}t}{1 + \sqrt{\frac{k}{g}}v_0 \tan \sqrt{kg}t} \quad (2.27)$$

と得られる．この速度の時間依存性は，図 2.6 のようになる．

[2] $v < 0$ の場合の運動方程式は，(2.24) の絶対値をはずすと，

$$\dot{v} = -g + kv^2 \quad (2.28)$$

となる．第 0.2.2 節の例題 0.16 と同様の解法より，1 階の常微分方程式 (2.28) の一般解は，

$$v = \sqrt{\frac{g}{k}} \cdot \frac{1 + Ce^{2\sqrt{kg}t}}{1 - Ce^{2\sqrt{kg}t}} \quad (2.29)$$

となる．

初期条件は $t = 0$ で $v = 0$ であるから，これを (2.29) に適用すると， $C = -1$ と定まる．従って，初期条件を満たす解は，

$$v = \sqrt{\frac{g}{k}} \cdot \frac{1 - e^{2\sqrt{kg}t}}{1 + e^{2\sqrt{kg}t}} = \sqrt{\frac{g}{k}} \cdot \frac{e^{-2\sqrt{kg}t} - 1}{e^{-2\sqrt{kg}t} + 1} \quad (2.30)$$

となる．

2.5.0.1 終端速度

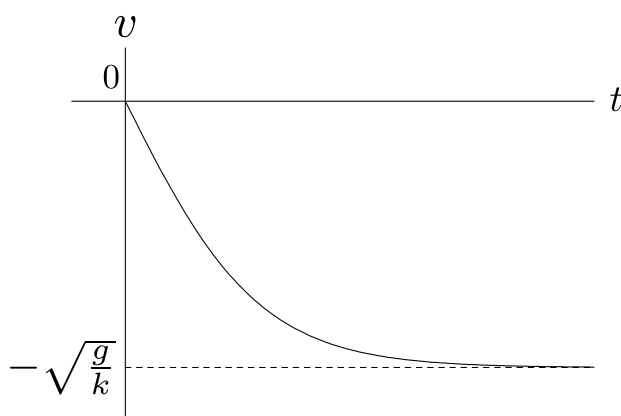


図 2.7. 問題 2.5[2], 速度 v の時間依存性. 点線は終端速度を示す.

例題 2.5[2] のように重力場の中を落下する運動では, 十分に長い時間が経過した後は, 速度は一定の値に到達する. これを**終端速度**という. 終端速度は, 求めた速度の式において, $t \rightarrow \infty$ の極限をとれば得られる. 解 (2.30) に対してこの極限をとると, 終端速度は, $v \rightarrow -\sqrt{\frac{g}{k}}$ となる. 図 2.7 に解 (2.30) の時間依存性と終端速度を示す.

終端速度に達した状態では加速度が 0 となることを用いて運動方程式より直接, 終端速度を求めることもできる. 例えば, 運動方程式 (2.28) において, 左辺を 0 とおくと,

$$0 = -g + kv^2$$

より, 終端速度が $|v| = \sqrt{\frac{g}{k}}$ と求まる.

問題

2.6 直線上を, 質点が, 一定の仕事率からなる外力と, 速度に比例した抵抗力を受けて運動している. この場合, 質点の質量で割った運動方程式は,

$$\frac{dv}{dt} = \frac{W}{v} - kv \quad (2.31)$$

となる. ここで, v は速度である. 又, W, k は正の定数とする. 時刻 $t = 0$ で $v = v_0$ ($0 < v_0 < \sqrt{\frac{W}{k}}$) とした時, 任意の時刻 t における速度 v を求めよ.

補足

仕事率については第 5 章の「第 5.1.1 節 運動エネルギー・仕事率」で説明する. 力と速度の積が仕事率となる.

2.7 直線上を, 質量 m の質点が, $m(av + bv^2)$ なる形の抵抗を受けて運動している. ここで, v は速度, a, b は正の定数である. 重力等の他の外力は考えない. この場合, 運動方程式 (両辺を m で割った形) は,

$$\frac{dv}{dt} = -av - bv^2 \quad (2.32)$$

である. 時刻 $t = 0$ で $v = v_0$ とした時, 任意の時刻 t における速度 v を求めよ.

ヒント

A, B をある定数として,

$$\frac{1}{v(v + \alpha)} = \frac{A}{v} + \frac{B}{v + \alpha}$$

のように部分分数に展開できる.

第3章 運動量と力積

運動量、力積の概念を新たに導入する。運動量の変化が力積に等しいことを用いて、物体の質量が変化する場合には成立する運動方程式を定式化する。質量が変化する物体の運動の例として、鎖の運動、ロケットの運動を取り扱う。

3.1 運動量

質量 m と速度（ベクトル） $\boldsymbol{v}$ の積、

$$\boldsymbol{p} = m\boldsymbol{v}$$

は、**運動量**と呼ばれ、やはりベクトルで定義される物理量である。

$\boldsymbol{F}$ を力のベクトルとした時、第2章で示したベクトル表記の運動方程式は、

$$\frac{d}{dt}(m\boldsymbol{v}) = \boldsymbol{F}$$

であった。ここで、質量 m は一定であることから、微分記号の中へ入れた。この方程式は、運動量を用いて、

$$\dot{\boldsymbol{p}} = \boldsymbol{F} \quad (3.1)$$

と書き換えることができる。

3.2 力積

(3.1) を時刻 t_0 から t まで積分すれば、

$$\boldsymbol{p}(t) - \boldsymbol{p}(t_0) = \int_{t_0}^t \boldsymbol{F} dt \quad (3.2)$$

となる。ここで、 $\boldsymbol{p}(t)$ のような表記は、 $\boldsymbol{p}$ が時間 t の関数であることを意味する。又、 $\boldsymbol{p}(t_0)$ のような表記は、 $\boldsymbol{p}$ の $t = t_0$ における値を意味する。(3.2) 右辺の積分を、力 $\boldsymbol{F}$ の**力積**という。力により与えられた力積の分だけ、運動量は変化する。

3.3 撃力

簡単のため、運動は x 軸上に限られるとし、1次元の運動方程式、

$$\frac{d}{dt}(mv_x) = F_x \quad (3.3)$$

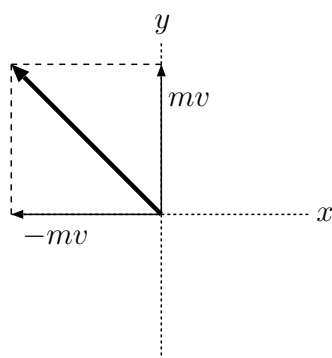
を考える．ここで v_x は速度である．力 F_x は，時刻 t_0 から $t_0 + \Delta t$ までの無限小の期間 Δt の間のみ作用するとする．この期間上で (3.3) を積分する．

$$\int_{t_0}^{t_0+\Delta t} \frac{d}{dt}(mv_x)dt = \int_{t_0}^{t_0+\Delta t} F_x dt$$

Δt が無限小の場合，右辺の被積分関数 F_x は積分区間上では一定とみなすことができるから，上式は，

$$mv_x(t_0 + \Delta t) - mv_x(t_0) = F_x \cdot \Delta t$$

と積分できる．無限小の期間に有限の大きさの力積が作用した場合， $\Delta t \rightarrow 0$ の極限で $F_x \rightarrow \infty$ であるが，右辺の力積 $F_x \cdot \Delta t$ は有限値に留まる．一方，この極限での左辺第1項の値は，左辺第2項とは異なる．即ち， $\Delta t \rightarrow 0$ の極限での左辺の運動量の変化は0ではない．このように，瞬間的に有限の大きさの力積を与えることのできる力のことを**撃力**という．



問題

3.1 速度 v で x 軸の正の向きに運動している質量 m の質点に，撃力を作用させたところ，質点は，速度の大きさは変えずに，運動の向きを y 軸の正の向きに変えたとする．

[1] この場合に質点に作用した力積の x 成分と y 成分を求めよ．

[2] 静止している質点に，問 [1] で求めた力積が作用した場合，質点はどのような運動を始めるか．

3.4 質量が変化する物体の運動方程式の導出

物体は x 軸上を運動するとする．式はベクトルではなく， x 軸に関する成分で表す．

時刻 t に物体の質量は m で速度は v とする．作用する外力は F とする．この時刻に，この物体に，相対速度 V で，微小質量 Δm の物体が合体する．相対速度は，時刻 t での微小質量の速度 u と元の物体の速度 v の差で，

$$V = u - v \quad (3.4)$$

で定義される．

合体後の時刻 $t + \Delta t$ に，質量は $m + \Delta m$ となり，速度は $v + \Delta v$ に変化した．合体の前後で，元の物体と微小質量の物体からなる系の運動量の変化は，外力のなす力積に等しく，

$$(m + \Delta m)(v + \Delta v) - (mv + \Delta m \cdot u) = F \Delta t$$

が成り立つ． u について (3.4) を用いると，

$$(m + \Delta m)(v + \Delta v) - [mv + \Delta m \cdot (v + V)] = F \Delta t \quad (3.5)$$

と表される．左辺を整理し，両辺を Δt で割る．

$$m \frac{\Delta v}{\Delta t} - V \frac{\Delta m}{\Delta t} + \frac{\Delta m \cdot \Delta v}{\Delta t} = F$$

$\Delta t \rightarrow 0$ の極限をとると，左辺の最後の項は0に収束するから，

$$m \frac{dv}{dt} - V \frac{dm}{dt} = F \quad (3.6)$$

に帰着する.

特に, 合体する微小物体の速度が $u = 0$ の場合を考える. この場合は (3.4) より, 相対速度が $V = -v$ となるから,

$$\frac{d}{dt}(mv) = F \quad (3.7)$$

となる.

3.5 質量が変化する物体の運動の例

物体の質量が時間的に変化する場合には, その運動は (3.6) の形の運動方程式に従う. 本節ではそのような運動の例として, 鎖の運動とロケットの運動を取り上げる.

3.5.1 鎖の運動

本節では, 常微分方程式としての運動方程式の解法において, 独立変数を時間から座標に変換するという解法を新たに勉強する.

例題

3.2

単位長さ当たりの質量 ρ_0 の鎖が, 図 3.1 に示すように, 滑らかな机の上から垂れ下がり, 重力の作用を受けて落下している. 机の上端を原点 O として, 鎖の下端の座標を x とおく. この場合, 鎖の下端が x の時の鎖の落下速度 $\dot{x}$ を求めよ. 更に, x と時刻 t の関係式を求めよ. 初期条件は, $t = 0$ で $x = \dot{x} = 0$ とする.

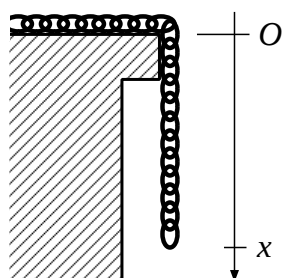


図 3.1. 問題 3.2

【解答】

[1] 運動方程式の導出

時刻 t に, 鎖は長さ x だけ机から垂れ下がっており, 速度 v (下向きを正とする) で自由落下しているとする. この時の垂れ下がっている部分の質量は $\rho_0 x$ である. 時刻 $t + \Delta t$ に, 机の上の微小長さ Δx の部分が新たに落下し, 速度は $v + \Delta v$ に変化したとする. 時刻 t での運動量は $\rho_0 x v$ である. 時刻 $t + \Delta t$ での運動量は $\rho_0 (x + \Delta x)(v + \Delta v)$ である. この間に作用する重力による力積は, $\rho_0 x g \Delta t$ である. よって, 関係式,

$$\rho_0 (x + \Delta x)(v + \Delta v) - \rho_0 x v = \rho_0 x g \Delta t$$

が成り立つ. 左辺を整理し, 両辺を Δt で割る.

$$\rho_0 x \frac{\Delta v}{\Delta t} + \rho_0 \frac{\Delta x}{\Delta t} v + \rho_0 \frac{\Delta x \cdot \Delta v}{\Delta t} = \rho_0 x g$$

$\Delta t \rightarrow 0$ の極限をとると, 左辺の最後の項は 0 に収束するから,

$$\rho_0 x \frac{dv}{dt} + \rho_0 \frac{dx}{dt} v = \rho_0 x g,$$

$$\frac{d}{dt}(\rho_0 x v) = \rho_0 x g,$$

に帰着する。ここで、 $v = \dot{x}$ である。従って、

$$\frac{d}{dt}(\rho_0 x \dot{x}) = \rho_0 x g$$

となる。

ここで、 ρ_0 は定数であるから、両辺を ρ_0 で割っておく。

$$\frac{d}{dt}(x \dot{x}) = g x \quad (3.8)$$

便宜上、

$$p = x \dot{x} \quad (3.9)$$

とおくと、運動方程式は、

$$\frac{dp}{dt} = g x \quad (3.10)$$

と書き換えられる。

[2] 運動方程式の独立変数の書き換え

変数 p を時間 t ではなく、座標 x の関数とみなして、常微分方程式 (3.10) を $\frac{dp}{dx}$ に関する常微分方程式に書き換える。

p は時間 t の関数であるが、座標 x が t の単調な関数なら逆関数が存在し、 t は x の関数と見なすことができる。実際、本問の場合、鎖は落下するのみであるから、 x は t の単調増加関数である。この場合、 p は x の関数と見なすことができる。この時、 p の時間微分 $\frac{dp}{dt}$ は、合成関数の微分として、

$$\frac{dp}{dt} = \frac{dp}{dx} \cdot \frac{dx}{dt} = \frac{dp}{dx} \dot{x}$$

と書き換えることができる。従って、常微分方程式 (3.10) は、

$$\frac{dp}{dx} \dot{x} = g x$$

と書き換えられる。ここで、(3.9) より $\dot{x} = \frac{p}{x}$ であるから、これは、

$$\frac{dp}{dx} p = g x^2 \quad (3.11)$$

と表される。

[3] 運動方程式の解

常微分方程式 (3.11) は、変数分離法により、簡単に解くことができる。

まず、左辺を変数 p 、右辺を変数 x のみを含む、変数分離形に変形する。

$$p dp = g x^2 dx$$

次に、左辺を p 、右辺を x について積分する。

$$\int p dp = g \int x^2 dx$$

積分を実行すると、

$$\frac{1}{2} p^2 = \frac{1}{3} g x^3 + C$$

となる。ここで C は任意定数である。これを p について解くと、 $p \geq 0$ であるから、

$$p = \sqrt{\frac{2}{3}gx^3 + 2C}$$

となる。 $x = 0$ で $p = 0$ となる初期条件を適用すると、 $C = 0$ と定まる。従って、初期条件を満足する解は、

$$p = \sqrt{\frac{2}{3}gx^3} \quad (3.12)$$

である。

[4] 座標 x の解

(3.9) に解 (3.12) を代入して、速度 $\dot{x}$ と座標 x の関係を表す常微分方程式に変形する。

$$\sqrt{\frac{2}{3}gx^3} = x\dot{x}$$

である。両辺を x で割ると、

$$\dot{x} = \sqrt{\frac{2g}{3}}x^{\frac{1}{2}} \quad (3.13)$$

となる。

常微分方程式 (3.13), 即ち、

$$\frac{dx}{dt} = \sqrt{\frac{2g}{3}}x^{\frac{1}{2}}$$

を同様にして、変数分離法により解く。

まず、左辺を変数 x , 右辺を変数 t のみを含む、変数分離形に変形する。

$$x^{-\frac{1}{2}}dx = \sqrt{\frac{2g}{3}}dt$$

次に、左辺を x , 右辺を t について積分する。

$$\int x^{-\frac{1}{2}}dx = \sqrt{\frac{2g}{3}} \int dt$$

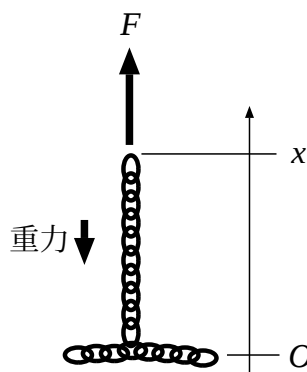
積分を実行すると、

$$x^{\frac{1}{2}} = \sqrt{\frac{g}{6}}t + C'$$

となる。ここで C' は任意定数である。 $t = 0$ で $x = 0$ なる初期条件を適用すると、 $C' = 0$ と定まる。従って、

$$x = \frac{g}{6}t^2$$

となる。



問題

3.3 床の上にかたまって置かれている鎖の一端に、一定の大きさ F の力を作
用させて、鉛直上向きに引き上げる。この場合、単位長さ当たりの鎖の質
量を ρ_0 とすると、運動方程式は、

$$\rho_0 \frac{d}{dt}(x\dot{x}) = F - \rho_0 gx$$

となる。ここで x は、引き上げられた部分の鎖の長さとする。便宜上、

$$p = x\dot{x} \quad (3.14)$$

とおくと、運動方程式は、

$$\rho_0 \frac{dp}{dt} = F - \rho_0 gx \quad (3.15)$$

と書き換えられる。

- [1] 変数 p を時間 t ではなく、座標 x の関数とみなして、常微分方程式 (3.15) を $\frac{dp}{dx}$ に関する常微分
方程式に書き換えよ。 (3.14) を用いて $\dot{x}$ は消去し、 p と x のみ含む式として求めること。
- [2] 問 [1] で示した常微分方程式を変数分離法により解き、その一般解を求めよ。最終的な結果は、(3.14)
を適用して、 p ではなく、速度 $\dot{x}$ を座標 x の関数として求めること。ただし、 $x > 0, \dot{x} \geq 0$ とする。
- [3] $x = x_0$ で $\dot{x} = 0$ となる初期条件を満足する解を求めよ。

3.5.2 ロケットの運動

ロケットの推進の原理を、運動量の保存から考える。

例題

3.4 単位時間あたり μ の割合で、ガスを、後方へ相対速度 V で噴出することで、直線上を運動するロケッ
トがある。ここで μ, V は正の定数である。

- [1] 任意の時刻 t におけるロケットの質量 m を求めよ。ただし、 $t = 0$ で $m = m_0$ とする。
- [2] 任意の時刻 t におけるロケットの質量、速度をそれぞれ m, v , 時刻 $t + \Delta t$ におけるロケットの質量、
速度をそれぞれ $m + \Delta m, v + \Delta v$ とおく。ここで、時刻 t から $t + \Delta t$ までの間に、質量 $-\Delta m$
だけのガスが噴出したと考えた。更に、時刻 $t + \Delta t$ におけるガスの速度を u とおく。ガスは、噴
出した後、すみやかにロケットから離れるので、時刻 t におけるガスの質量は 0 と考えてよい。

外力が作用しない場合、時刻 t から $t + \Delta t$ までの間の、ロケットとガスからなる系の運動量の
変化は 0 となる（即ち、系の運動量は保存する）。この運動量の変化の式を、与えられた記号を用
いて示せ。

- [3] 題意より、時刻 $t + \Delta t$ におけるガスの相対速度に関して、

$$-V = u - (v + \Delta v) \quad (3.16)$$

が成り立つ。ここで、相対速度とは、ロケットに固定した座標系から見たガスの速度のことである。
左辺に負号がつくのは、ガスがロケットの進行方向（速度の正の向きと定義）とは逆向きに噴出す
るからである。

この式を用いて、問 [2] で示した式から u を消去した式を示せ。更に、この式の両辺を Δt で割
り、 $\Delta t \rightarrow 0$ の極限をとることによって得られる方程式を示せ。

[4] $t = 0$ で $v = 0$ なる初期条件のもとで、問 [3] で求めた運動方程式の解を求めよ。

【解答】

[1] 題意より、方程式、

$$\frac{dm}{dt} = -\mu \quad (3.17)$$

が成り立つ。与えられた初期条件のもとで、これを積分すると、

$$m = m_0 - \mu t \quad (3.18)$$

となる。

[2] 題意より、時刻 t から $t + \Delta t$ までの間の、ロケットの運動量の変化は、

$$(m + \Delta m)(v + \Delta v) - mv,$$

ガスの運動量の変化は、

$$-\Delta m \cdot u - 0$$

である。重力等の外力が作用しない場合、ロケットとガスからなる系の運動量は保存し、

$$[(m + \Delta m)(v + \Delta v) - mv] + [-\Delta m \cdot u - 0] = 0$$

$$\therefore (m + \Delta m)(v + \Delta v) - mv - \Delta m \cdot u = 0 \quad (3.19)$$

が成り立つ。

[3] (3.16) より、

$$u = v + \Delta v - V$$

である。これを (3.19) に代入する。

$$(m + \Delta m)(v + \Delta v) - mv - \Delta m \cdot (v + \Delta v - V) = 0$$

左辺を整理すると、

$$m\Delta v + V\Delta m = 0$$

となる。両辺を Δt で割り、 $\Delta t \rightarrow 0$ の極限をとる。

$$m \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta v}{\Delta t} + V \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta m}{\Delta t} = 0$$

この極限は、方程式、

$$m \frac{dv}{dt} + V \frac{dm}{dt} = 0 \quad (3.20)$$

に帰着する。

[4] (3.20) に (3.17) を代入すると,

$$m \frac{dv}{dt} - \mu V = 0$$

となる. これに (3.18) を代入すると,

$$\frac{dv}{dt} = \frac{\mu V}{m_0 - \mu t}$$

が得られる. これを時間積分すると,

$$v = -V \log(m_0 - \mu t) + v_0$$

となる. ここで v_0 は積分定数である. $t = 0$ で $v = 0$ なる初期条件を適用すると, $v_0 = V \log m_0$ と定まる. 従って与えられた初期条件を満たす解は,

$$v = V \log \left(\frac{m_0}{m_0 - \mu t} \right)$$

となる.

問題

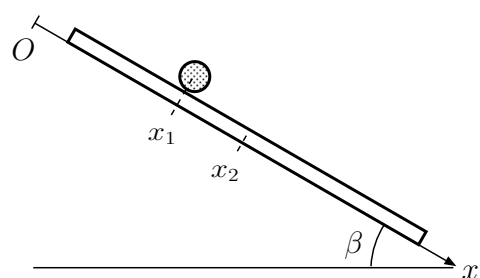
3.5 例題 3.4 で, ロケットが進む向きと逆向きに, 重力が作用する場合はどうなるか.

3.6 2つの物体からなる系の運動: 系の運動量の保存

2つの物体 I, II からなる系において内力のみが作用する場合, 即ち, 物体 I から 物体 II に作用する力と, 物体 II から 物体 I に作用する力の間には, 作用・反作用の関係がある場合, 系の運動量は保存する. そのような運動の例を取り上げる.

例題

3.6



水平面に対して角度 β をなす滑らかな斜面上に, 質量 M の板が置かれている. 板の裏面は滑らかであるとし, 板と斜面の間に摩擦力は働かない. 板の表面は粗いとし, その動摩擦係数を μ' とする. この板の上に, 質量 m の質点をおくと, 質点は板の上を運動すると共に, 板は斜面上を運動する.

斜面に固定した座標系として, 斜面上に沿って, 斜面を下る向きに x 軸をとる. 質点の座標を x_1 , 板の座標を x_2 とおく.

$t = 0$ において, 斜面に固定した座標系から見た, 板の速度は 0, 質点の速度は v_0 とする.

[1] 質点及び板の運動方程式を示せ.

[2] 時刻 t における質点及び板の速度を求めよ.

[3] 質点と板からなる系の重心を,

$$x_G = \frac{mx_1 + Mx_2}{m + M} \quad (3.21)$$

で、質点の座標と板の座標の差で定義される相対変位を、

$$\eta = x_1 - x_2 \quad (3.22)$$

で定義する。

問 [1] で示した運動方程式を、重心に関する運動方程式と、相対変位に関する運動方程式に書き換えよ。

[4] 時刻 t における重心及び相対変位の速度を求めよ。

[5] 相対変位の速度が 0 となる時刻 t_n を求めよ。更に、 $t > t_n$ の時刻では、質点及び板がどのような運動をするのかを求めよ。

【解答】

[1] $v_0 > 0$ と仮定する。即ち、初期に質点は斜面を下る向きに運動すると仮定する。この場合、運動する板に固定した座標系から見た質点の速度（以下、相対速度と呼ぶ）は v_0 で、 $v_0 > 0$ である。質点に作用する動摩擦力の向きは、斜面を上る向き（ x 軸の負の向き）となる。

質点が板から受ける抗力の大きさを R_1 とおくと、それは重力の斜面に垂直な成分 $mg \cos \beta$ とつりあい、

$$R_1 = mg \cos \beta$$

となる。板が斜面から受ける抗力の大きさを R_2 とおくと、それは重力の斜面に垂直な成分 $Mg \cos \beta$ と、質点が板から受ける抗力の反作用との和とつりあい、

$$R_2 = Mg \cos \beta + R_1 = (M + m)g \cos \beta$$

となる。

質点が板から受ける摩擦力の大きさは、 $\mu' R_1 = \mu' mg \cos \beta$ で、向きは先述したように、斜面を上る向き（負の向き）となる。板は、この摩擦力の反作用（大きさは同じで、向きは反対の正の向き）を受ける。

以上より、質点及び板の運動方程式は、

$$m\ddot{x}_1 = mg \sin \beta - \mu' mg \cos \beta, \quad (3.23a)$$

$$M\ddot{x}_2 = Mg \sin \beta + \mu' mg \cos \beta, \quad (3.23b)$$

となる。

[2] (3.23) を整理する。

$$\ddot{x}_1 = g(\sin \beta - \mu' \cos \beta),$$

$$\ddot{x}_2 = g \left(\sin \beta + \mu' \frac{m}{M} \cos \beta \right).$$

これを時間積分する。

$$\dot{x}_1 = g(\sin \beta - \mu' \cos \beta) \cdot t + C_1,$$

$$\dot{x}_2 = g \left(\sin \beta + \mu' \frac{m}{M} \cos \beta \right) \cdot t + C_2.$$

ここで、 C_1, C_2 は積分定数である。初期条件 $t = 0$ で $\dot{x}_1 = v_0, \dot{x}_2 = 0$ を適用すると、 $C_1 = v_0, C_2 = 0$ と定まる。従って、初期条件を満足する速度の解は、

$$\dot{x}_1 = g(\sin \beta - \mu' \cos \beta) \cdot t + v_0, \quad (3.24a)$$

$$\dot{x}_2 = g \left(\sin \beta + \mu' \frac{m}{M} \cos \beta \right) \cdot t \quad (3.24b)$$

となる。

[3] 質点の運動方程式 (3.23a) と板の運動方程式 (3.23b) の和をとると、動摩擦力が消去され、

$$m\ddot{x}_1 + M\ddot{x}_2 = (m + M)g \sin \beta$$

となる。ここで重心の定義 (3.21) を用いると、

$$(M + m)\ddot{x}_G = (m + M)g \sin \beta \quad (3.25)$$

と表される。

質点の運動方程式 (3.23a) の両辺を m で割った式と、板の運動方程式 (3.23b) の両辺を M で割った式の差をとると、重力が消去され、

$$\ddot{x}_1 - \ddot{x}_2 = - \left(\frac{1}{m} + \frac{1}{M} \right) \mu' mg \cos \beta$$

となる。ここで、

$$\frac{1}{m_*} = \frac{1}{m} + \frac{1}{M}$$

で定義される換算質量 m_* を導入する。これを用いると、相対変位 (3.22) に関する運動方程式、

$$m_* \ddot{\eta} = -\mu' mg \cos \beta \quad (3.26)$$

が得られる。

付記

以上のように、重心に関する運動方程式を立てると、内力が消去でき、系に作用する力は重力のような外力のみとなる。一方、相対変位の運動方程式を立てると、外力が消去でき、系に作用する力は内力のみとなる。従って、このような方程式では、作用する力の種類を外力と内力に分離することができ、現象の力学的な解釈が容易となる。

特に外力が作用しない場合は、重心は初速度で等速度運動をする。この場合は、相対変位のみが加速度運動をするので、相対変位の運動のみが力学的には重要となる。

[4] 重心に関する運動方程式の両辺を $M + m$ で割り、時間積分すると、

$$\dot{x}_G = g \sin \beta \cdot t + D_1$$

となる。ここで D_1 は積分定数である。与えられた初期条件の場合、重心に関する初速度は、 $t = 0$ で $\dot{x}_G = \frac{m}{m+M} v_0$ となる。これより積分定数は、 $D_1 = \frac{m}{m+M} v_0$ と定まる。従って、初期条件を満たす重心の速度の解は、

$$\dot{x}_G = g \sin \beta \cdot t + \frac{m}{m+M} v_0$$

となる。

相対変位に関する運動方程式の両辺を m_* で割り、時間積分すると、

$$\dot{\eta} = -\mu' \frac{m}{m_*} g \cos \beta \cdot t + D_2$$

となる．ここで D_2 は積分定数である．与えられた初期条件の場合，相対変位に関する初速度は， $t = 0$ で $\dot{\eta} = v_0$ となる．これより積分定数は， $D_2 = v_0$ と定まる．従って，初期条件を満たす相対変位の速度の解は，

$$\dot{\eta} = -\mu' \frac{m}{m_*} g \cos \beta \cdot t + v_0$$

となる．

[5] 相対変位の速度は，

$$t_n = \frac{v_0}{\mu' \frac{m}{m_*} g \cos \beta} = \frac{M v_0}{\mu' (m + M) g \cos \beta}$$

なる時刻で 0 となる．この時刻での質点，板の速度は等しく，

$$\dot{x}_1(t_n) = \dot{x}_2(t_n) = \frac{v_0}{m + M} \left(m + \frac{M}{\mu'} \tan \beta \right)$$

となる．この時刻以降では，動摩擦力が作用しない．質点，板とも同じ重力加速度 $g \sin \beta$ を受けて運動し，同じ速度で斜面を下る．

例題

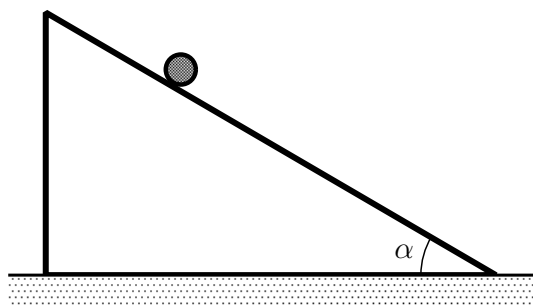


図 3.2. 問題 3.7

3.7 水平方向に対して角度 α をなす，滑らかな斜面からなる質量 M の台が，滑らかな水平面上に置かれている．この斜面に質量 m の質点を静かに置くと，質点は斜面上を転がり落ちるとともに，台も水平方向に動く．この時の台の加速度を求めよ．

【解答】

水平面上の適当な位置に原点 O をとり，水平右向きに x 軸を，鉛直上向きに y 軸をとる．この座標系 Oxy 系に対する質点の座標を (x, y) とおく．又，台の適当な場所 O' に目印を付け，その位置の x 座標を X とおく．

質点には，鉛直下向きに重力 mg ，斜面に垂直に大きさ R の抗力が作用する．この場合，質点の運動方程式は，

$$m\ddot{x} = R \sin \alpha, \quad (3.27a)$$

$$m\ddot{y} = R \cos \alpha - mg, \quad (3.27b)$$

となる．台には，質点を受ける抗力の反作用が作用するから，台の運動方程式の x 成分は，

$$M\ddot{X} = -R \sin \alpha \quad (3.28)$$

となる．台は，水平面から離れることはないのて，その運動の y 成分は考える必要は無い．

(3.27a) と (3.28) の和をとると，

$$m\ddot{x} + M\ddot{X} = 0$$

$$\therefore \frac{d}{dt}(m\dot{x} + M\dot{X}) = 0$$

となる。これは、質点と台からなる系の運動量の水平成分が保存することを示す。水平方向には、内力である抗力のみが作用するからである。一方、鉛直方向には、外力である重力が作用するので、系の運動量の鉛直成分は保存しない。

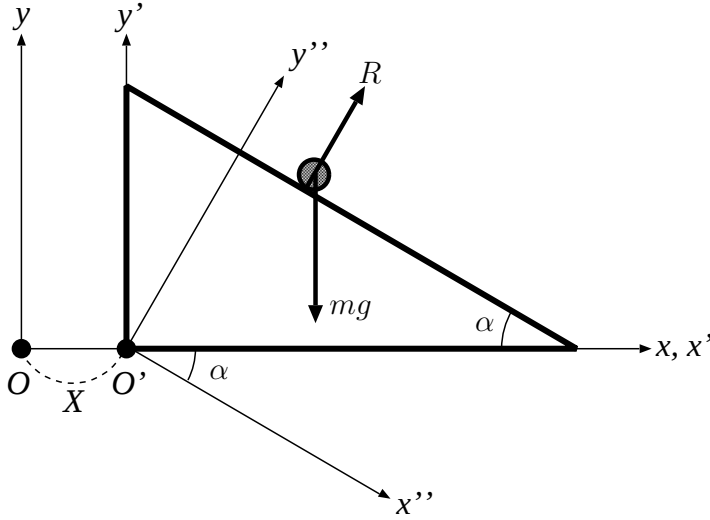


図 3.3. 問題 3.7：座標系と質点に作用する力

台の目印の位置 O' を原点として、**台に固定した座標系 $O'x'y'$ を考える**。ここで、 x 軸に平行な座標軸を x' 軸、 y 軸に平行な座標軸を y' 軸とする。この座標系に対する質点の座標を (x', y') とおく。この場合、 Oxy 系に関する座標 (x, y) と、 $O'x'y'$ 系に関する座標 (x', y') の間には、

$$x = X + x', \quad (3.29a)$$

$$y = y', \quad (3.29b)$$

なる関係がある。座標変換 (3.29) を (3.27) に適用すると、 $O'x'y'$ 系に関する質点の運動方程式、

$$m\ddot{x}' = R \sin \alpha - m\ddot{X}, \quad (3.30a)$$

$$m\ddot{y}' = R \cos \alpha - mg, \quad (3.30b)$$

が得られる。

座標系 $O'x'y'$ 系では問題を解きにくい。そこで、 $O'x'y'$ 系を、原点 O' の回りに、時計回りに角度 α だけ回転し、**座標軸が斜面に平行・垂直となる座標系 $O'x''y''$ 系**を新たに考える。この場合、2つの座標系間の座標の変換則は、

$$x'' = x' \cos \alpha - y' \sin \alpha, \quad (3.31a)$$

$$y'' = x' \sin \alpha + y' \cos \alpha, \quad (3.31b)$$

と表される。角度 α が定数であることに留意して、これを時間について2回微分すると、2つの座標系間の加速度の変換則、

$$\ddot{x}'' = \ddot{x}' \cos \alpha - \ddot{y}' \sin \alpha, \quad (3.32a)$$

$$\ddot{y}'' = \ddot{x}' \sin \alpha + \ddot{y}' \cos \alpha, \quad (3.32b)$$

が得られる。運動方程式 (3.30) に対して、この座標変換を施すことで、 $O'x''y''$ 系に関する運動方程式に書き換える。即ち、 $(3.30a) \times \cos \alpha + (3.30b) \times (-\sin \alpha)$ 、及び、 $(3.30a) \times \sin \alpha + (3.30b) \times \cos \alpha$ より、以下が得られる。

$$m\ddot{x}'' = -m\ddot{X} \cos \alpha + mg \sin \alpha, \quad (3.33a)$$

$$m\ddot{y}'' = R - m\ddot{X} \sin \alpha - mg \cos \alpha. \quad (3.33b)$$

ところで、質点は台から離れないので、台に垂直な方向には運動しない。即ち、 $\ddot{y}'' = 0$ である。これを (3.33b) に適用すると、抗力が、

$$R = m\ddot{X} \sin \alpha + mg \cos \alpha \quad (3.34)$$

と求まる。

これを台の運動方程式 (3.28) に代入すると、台の水平方向の加速度が、

$$\ddot{X} = -\frac{mg \sin \alpha \cos \alpha}{M + m \sin^2 \alpha} \quad (3.35)$$

と求まる。

第4章 角運動量と力のモーメント

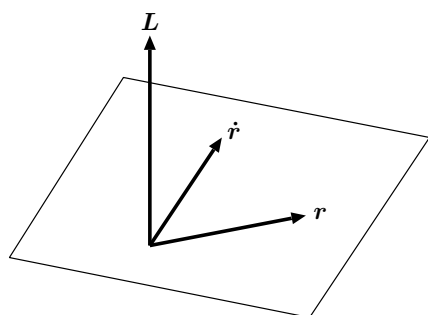
本章では、角運動量と力のモーメントの概念を新たに導入する。それを元に、角運動量方程式を導出する。更に、2次元極座標系の場合の角運動量方程式を提示する。

なお、質量 m は再び、一定と仮定する。このことから、必要に応じて、 m は微分記号の中へ入れることがある。

4.1 定式化

ここでは、ベクトル表記の運動方程式に対して、ベクトル積の演算を適用して、式の変形を行う。

4.1.1 角運動量方程式



ベクトル表記の運動方程式,

$$m\ddot{\mathbf{r}} = \mathbf{F} \quad (2.1)$$

の両辺に、左から、位置ベクトル $\mathbf{r}$ とのベクトル積をとる。

$$m\mathbf{r} \times \ddot{\mathbf{r}} = \mathbf{r} \times \mathbf{F}$$

ここで、ベクトル積 $\mathbf{r} \times \dot{\mathbf{r}}$ の時間微分について、

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{r} \times \dot{\mathbf{r}}) = \dot{\mathbf{r}} \times \dot{\mathbf{r}} + \mathbf{r} \times \ddot{\mathbf{r}} = \mathbf{r} \times \ddot{\mathbf{r}}$$

が成り立つことを考慮すると（第0章の公式 (0.15c) 参照），

$$\frac{d}{dt}(m\mathbf{r} \times \dot{\mathbf{r}}) = \mathbf{r} \times \mathbf{F} \quad (4.1)$$

となる。ここで m は定数なので、微分記号の中へ入れた。

ベクトル $\mathbf{L} = m\mathbf{r} \times \dot{\mathbf{r}}$ は**角運動量**，ベクトル $\mathbf{N} = \mathbf{r} \times \mathbf{F}$ は**力のモーメント**で、これらはベクトル積で定義される物理量となる。(4.1)を角運動量方程式と呼ぶ。この方程式は、角運動量の時間変化率が力のモーメントに等しいことを示す。角運動量 $\mathbf{L}$ は、位置ベクトル $\mathbf{r}$ と速度ベクトル $\dot{\mathbf{r}}$ で張られる平面の法線ベクトルとなる。

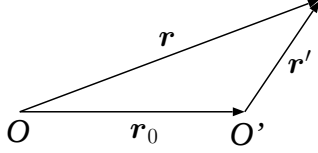
※ 角運動量方程式の導出の際、左から位置ベクトルとのベクトル積をとった。これは座標系として右手系を採用した場合の約束である。

第0.1節「ベクトル」の第0.1.6小節で取り上げたように、位置ベクトルや速度は軸性ベクトルであるのに対して、角運動量や力のモーメントは極性ベクトル（擬ベクトル）である。

4.1.2 角運動量の保存

特に、力のモーメントが $\mathbf{0}$ の場合、角運動量は時間的に一定のベクトルとなる。これを角運動量が保存するという。角運動量が保存するのは、力が $\mathbf{0}$ であるか、力が位置ベクトルと平行な場合である。

4.1.3 角運動量方程式の不変性



角運動量や力のモーメントの定義には位置ベクトルが含まれるので、これらの値は原点の選び方に依存する。しかし、原点が変わっても角運動量方程式の形は変わらない。このことを証明する。

仮に、原点を O から、定ベクトル $\mathbf{r}_0$ だけ O' へ移動させたとする。 O' に関する位置ベクトルを $\mathbf{r}'$ とすると、

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + \mathbf{r}' \quad (4.2)$$

なる関係がある。これを時間について 1 回、2 回微分する。

$$\dot{\mathbf{r}} = \dot{\mathbf{r}}' \quad (4.3)$$

$$\ddot{\mathbf{r}} = \ddot{\mathbf{r}}' \quad (4.4)$$

まず、(4.4) より、新しい座標系に関する運動方程式は、

$$m\ddot{\mathbf{r}}' = \mathbf{F} \quad (4.5)$$

となり、元の座標系の運動方程式 (2.1) と同型である。これは、座標変換 (4.2) が単なる平行移動であり、新しい座標系が、慣性系であることを意味する（慣性系については「一般力学 II」の「非慣性系における運動」で学ぶ）。

一方、角運動量方程式 (4.1) に同じ座標変換 (4.2) を施すと、

$$\frac{d}{dt}[m(\mathbf{r}_0 + \mathbf{r}') \times \dot{\mathbf{r}}'] = (\mathbf{r}_0 + \mathbf{r}') \times \mathbf{F}$$

$$m\mathbf{r}_0 \times \dot{\mathbf{r}}' + \frac{d}{dt}(m\mathbf{r}' \times \dot{\mathbf{r}}') = \mathbf{r}_0 \times \mathbf{F} + \mathbf{r}' \times \mathbf{F}$$

となる。ここで (4.5) より、左辺第 1 項と右辺第 1 項は等しく、

$$\frac{d}{dt}(m\mathbf{r}' \times \dot{\mathbf{r}}') = \mathbf{r}' \times \mathbf{F} \quad (4.6)$$

に帰着する。座標変換 (4.2) を施して得られる原点 O' に関する角運動量方程式は、元の原点 O に関する角運動量方程式 (4.1) と同型である。このことは、原点の選び方を変えても、結果として記述される運動は同じであることを意味する。

4.2 各座標系に関する表式

4.2.1 デカルト座標系に関する表式

質点のデカルト座標を $\mathbf{r} = (x, y, z)$ 、力のデカルト座標系に関する成分を $\mathbf{F} = (F_x, F_y, F_z)$ とおく。この時、角運動量 $\mathbf{L} = m\mathbf{r} \times \dot{\mathbf{r}}$ のデカルト座標系に関する成分 $\mathbf{L} = (L_x, L_y, L_z)$ は、

$$L_x = m(y\dot{z} - z\dot{y}), \quad L_y = m(z\dot{x} - x\dot{z}), \quad L_z = m(x\dot{y} - y\dot{x}), \quad (4.7)$$

である。又、力のモーメント $\mathbf{N} = \mathbf{r} \times \mathbf{F}$ のデカルト座標系に関する成分 $\mathbf{N} = (N_x, N_y, N_z)$ は、

$$N_x = yF_z - zF_y, \quad N_y = zF_x - xF_z, \quad N_z = xF_y - yF_x, \quad (4.8)$$

である。従って、角運動量方程式 (4.1) のデカルト座標系に関する成分は、下式のようなになる。

$$\frac{d}{dt}[m(y\dot{z} - z\dot{y})] = yF_z - zF_y, \quad (4.9a)$$

$$\frac{d}{dt}[m(z\dot{x} - x\dot{z})] = zF_x - xF_z, \quad (4.9b)$$

$$\frac{d}{dt}[m(x\dot{y} - y\dot{x})] = xF_y - yF_x. \quad (4.9c)$$

問題

4.1 質量 m の質点の時刻 t におけるデカルト座標が、問題 1.7 の (1.27) で与えられるとする。

[1] 角運動量の x, y, z 成分を計算せよ。

[2] 問 [1] で求めた角運動量の時間微分を計算し、テキスト (4.9) 式から、力の x, y 成分 F_x, F_y を推定せよ。ただし、 z 方向には等速度運動することから、力の z 成分は 0 ($F_z = 0$) としてよい。

4.2.2 平面運動の場合の表式

特に、力が xy 面に平行な場合を考える。この場合、 xy 面上におかれた質点の初速度が xy 面に平行ならば、その後の運動は xy 面上に限られる。この時、角運動量、力のモーメントのいずれも z 成分のみ値を持ち、角運動量方程式は、

$$\frac{d}{dt}[m(x\dot{y} - y\dot{x})] = xF_y - yF_x \quad (4.9c)$$

なる簡単な形となる。

問題

4.2 鉛直下方に一樣な重力が作用する場合の中で、原点から初速度 v_0 で、水平方向と θ_0 の角度をなす方向に、質量 m の質点を投げ上げる。ただし、抵抗力は無視する（第 2 章の例題 2.1 と同じ設定）。

例題 2.1 の結果を用いて、時刻 t における角運動量と力のモーメントを計算せよ。そして、角運動量の時間変化率は、力のモーメントに等しいことを確かめよ。

4.2.3 極座標系に関する表式

2 次元極座標系を用いた場合、角運動量の方程式 (4.9c) は、

$$\frac{d}{dt}(mr^2\dot{\theta}) = rF_\theta \quad (4.10)$$

と表される。ここで、 r は原点から質点までの距離、 θ は x 軸の正の向きに対する位置ベクトルのなす角である。これらはデカルト座標と、

$$x = r \cos \theta, \quad y = r \sin \theta, \quad (1.7)$$

なる関係にある（第 1.3 節参照）。又，力の動径成分 F_r ，角成分 F_θ は，デカルト座標系に関する成分と，

$$F_r = F_x \cos \theta + F_y \sin \theta, \quad (4.11a)$$

$$F_\theta = -F_x \sin \theta + F_y \cos \theta, \quad (4.11b)$$

なる関係にある。

問題

4.3 以下の手順にしたがって，(4.9c) から (4.10) を導出したい。

[1] 角運動量の z 成分は極座標系 $x = r \cos \theta$ ， $y = r \sin \theta$ を用いて書き換えると，

$$m(xy\dot{y} - y\dot{x}) = mr^2\dot{\theta} \quad (4.12)$$

となる。これを示せ。

[2] (1.7) 式及び問 [2] の結果を用いて，力のモーメントの z 成分が， rF_θ となることを示せ。

4.4 問題 1.3 について，

[1] 角運動量の z 成分を求めよ。

[2] 作用する力のモーメントの z 成分を求めよ。

第5章 仕事とエネルギー

本章では仕事とエネルギーについて説明する。

5.1 1次元の場合

常微分方程式としての運動方程式を解くのが数学的に難しい場合でも，全エネルギーが保存する場合には，このことを用いて問題を解ける場合がある．本節では，このエネルギーの概念とその応用について説明する．なお，簡単のため，本節では，直線上の運動という簡単な場合について考える．

5.1.1 運動エネルギー・仕事率

質点は x 軸上を運動するとする．この質点に働く力を F_x とおくと，運動方程式は，

$$m\ddot{x} = F_x \quad (5.1)$$

である．両辺に速度 $\dot{x}$ をかけると，

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} m \dot{x}^2 \right) = F_x \dot{x}, \quad (5.2)$$

と変形することができる．左辺 ($\cdots$) 内の，

$$K = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 \quad (5.3)$$

を**運動エネルギー**と呼ぶ．又，(5.2) の右辺は，力 F_x が単位時間あたりになす**仕事（仕事率）**を表す．

5.1.2 仕事

質点が，時刻 t_0 における位置 x_0 （速度 v_0 ）から，時刻 t における位置 x （速度 v ）まで移動したとする．この時，(5.2) を時間について t_0 から t まで積分すると，

$$\frac{1}{2} m v^2 - \frac{1}{2} m v_0^2 = \int_{t_0}^t F_x \frac{dx}{dt} dt \quad (5.4)$$

となる．右辺は，力 F_x のなす**仕事**を表す．左辺は時刻 t_0 と時刻 t の運動エネルギーの差を表す．**運動エネルギーの変化はなされた仕事に等しい**．

特に，力 F_x が速度や時間には依存せず，座標 x のみの関数とする．この場合，右辺の時間に関する積分は，座標に関する積分で置き換えることができ，

$$\frac{1}{2} m v^2 - \frac{1}{2} m v_0^2 = \int_{x_0}^x F_x dx \quad (5.5)$$

と表される．

5.1.3 ポテンシャルエネルギーと保存力のなす仕事

力 F_x が、速度 $\dot{x}$ にも時間 t にも依存せず、座標 x のみに依存する場合を考える。この場合、(5.2) の右辺は、形式的に次のように変形できる。

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} m \dot{x}^2 \right) = \frac{d}{dx} \left(\int F_x dx \right) \dot{x} = \frac{d}{dx} \left(\int F_x dx \right) \cdot \frac{dx}{dt}$$

最右辺は、合成関数の微分として考えると、

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} m \dot{x}^2 \right) = \frac{d}{dt} \left(\int F_x dx \right),$$

従って、右辺を左辺へ移項して、

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} m \dot{x}^2 - \int F_x dx \right) = 0 \quad (5.6)$$

と書き換えることができる。そこで、

$$U = - \int F_x dx \quad (5.7)$$

で定義される、座標 x のみに依存するスカラー関数 U を導入する。この時、力 F_x は U から、

$$F_x = - \frac{dU}{dx} \quad (5.8)$$

の様に導くことができる。この関数 U をポテンシャルエネルギーという。ポテンシャルエネルギーを持つ力を保存力という。

ポテンシャルエネルギーを、

$$U' = U + U_0$$

のように、 U を定数 U_0 だけ変えても、この U' は U と同じ力を与える。

$$F_x = - \frac{dU}{dx} = - \frac{dU'}{dx}$$

即ち、ポテンシャルエネルギーには、定数の分だけ不定性がある。

質点が、時刻 t_0 における位置 x_0 から、時刻 t における位置 x まで移動した時に力のなす仕事 W は、(5.5) の右辺で表され、

$$W = \int_{x_0}^x F_x dx$$

である。これに (5.8) を代入すると、

$$W = - \int_{x_0}^x \frac{dU}{dx} dx = U(x_0) - U(x)$$

となる。保存力のなす仕事は、運動の経路には依存せず、始点の座標と終点の座標で決まる。

5.1.4 全エネルギーとその保存

方程式 (5.6) は、ポテンシャルエネルギーを用いて、

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} m \dot{x}^2 + U \right) = 0, \quad (5.9)$$

と表される。これは、運動エネルギー (5.3) とポテンシャルエネルギー (5.7) の和で定義される全エネルギー、

$$E = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + U \quad (5.10)$$

が時間的に一定である（即ち、 E は定数である）ことを示す。このことを、**全エネルギーが保存する**という。又、方程式 (5.9) をエネルギー方程式と呼ぶ。

5.1.5 全エネルギーの保存の応用

5.1.5.1 一様な重力が作用する場合

座標 x を高さとして、一様な重力が作用する場合を考える。 g を重力定数とする。運動方程式は、

$$m\ddot{x} = -mg$$

である。両辺に速度 $\dot{x}$ を掛け、変形すると、

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2}m\dot{x}^2 \right) &= -mg \frac{dx}{dt} \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2}m\dot{x}^2 + mgx + U_0 \right) &= 0 \end{aligned}$$

に帰着する。ここで U_0 は積分定数である。重力によるポテンシャルエネルギー U は、

$$U = mgx + U_0$$

である。高さ 0 ($x = 0$) でポテンシャルエネルギーが 0 となるように積分定数を決めると、 $U_0 = 0$ と定まるから、

$$U = mgx$$

となる。全エネルギーは、

$$E = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + mgx$$

となり、 $\frac{dE}{dt} = 0$ より保存する。

問題

5.1 問題 2.2 について、エネルギー方程式を導出し、全エネルギーが保存することを示せ。

5.1.5.2 力が座標の関数の場合

例題

5.2 重力加速度 g が、高さ x とともに $g = g_0 \left(1 + \frac{x}{a}\right)^{-2}$ に従って減少すると仮定する。この時、初速度 v_0 で、鉛直上向きに質点を投げ上げる。ここで g_0, a は正の定数とし、抵抗力は考えない。

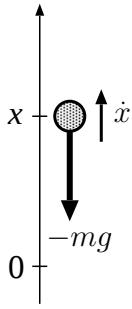
[1] $v_0 < \sqrt{2ag_0}$ の場合、物体の運動はどうなるか。

[2] 逆に、 $v_0 > \sqrt{2ag_0}$ の場合、物体の運動はどうなるか。

【解答】

題意より，運動方程式は，

$$m\ddot{x} = -mg = -\frac{mg_0}{\left(1 + \frac{x}{a}\right)^2} \quad (5.11)$$



である．この両辺に速度 $\dot{x} = \frac{dx}{dt}$ を掛け，順次変形する．

$$m\dot{x}\ddot{x} = -\frac{mg_0}{\left(1 + \frac{x}{a}\right)^2}\dot{x}$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}m\dot{x}^2\right) = -\frac{d}{dx}\left(\int \frac{mg_0}{\left(1 + \frac{x}{a}\right)^2}dx\right) \cdot \frac{dx}{dt}$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}m\dot{x}^2\right) = -\frac{d}{dx}\left(-\frac{mag_0}{1 + \frac{x}{a}} + U_0\right) \cdot \frac{dx}{dt}$$

ここで， U_0 は積分定数である．右辺は**合成関数の微分**より，時間微分として表すことができるから，以下のように変形される．

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}m\dot{x}^2\right) = -\frac{d}{dt}\left(-\frac{mag_0}{1 + \frac{x}{a}} + U_0\right)$$

$$\therefore \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}m\dot{x}^2 - \frac{mag_0}{1 + \frac{x}{a}} + U_0\right) = 0$$

この式は，**運動エネルギー** $\frac{1}{2}m\dot{x}^2$ と，**ポテンシャルエネルギー**

$$U = -\frac{mag_0}{1 + \frac{x}{a}} + U_0$$

の和で定義される**全エネルギー**

$$E = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 - \frac{mag_0}{1 + \frac{x}{a}} + U_0$$

が保存することを示す．さて，力はポテンシャルエネルギーの空間微分 $-\frac{dU}{dx}$ により与えられるから，積分定数 U_0 の値は，力の大きさには関与しない．従って，その値は任意に定めても運動には影響を与えない．ここでは，無限遠方 $x \rightarrow \infty$ で $U \rightarrow 0$ となるように U_0 の値を決めることにする．そうすると $U_0 = 0$ と定めることができる．この場合，ポテンシャルエネルギーは，

$$U = -\frac{mag_0}{1 + \frac{x}{a}},$$

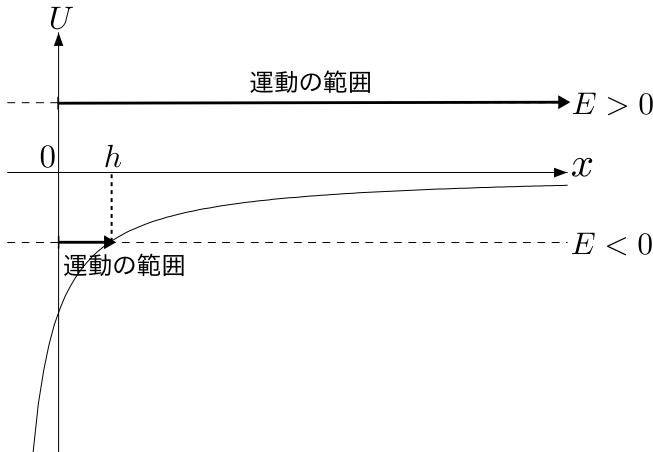
全エネルギーは，

$$E = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 - \frac{mag_0}{1 + \frac{x}{a}} \quad (5.12)$$

となる．

$\frac{dE}{dt} = 0$ より，**全エネルギーは保存する**，即ち，全エネルギー E は定数であることがわかる．定数 E の値は，以下に示すように，初期条件により決まる．

[1] 有限の高さに到達し得る場合について考える。



初期に $x = 0$ で $\dot{x} = v_0$ とすると, (5.12) に代入することで, 全エネルギーの値が,

$$E = \frac{1}{2}mv_0^2 - mag_0 \quad (5.13)$$

と定まる. 初期の状態と, 任意の状態 (座標 x , 速度 $\dot{x}$) との間で, 全エネルギーが等しいことにより, 等式,

$$\frac{1}{2}m\dot{x}^2 - \frac{mag_0}{1 + \frac{x}{a}} = \frac{1}{2}mv_0^2 - mag_0 \quad (5.14)$$

が成り立つ. 特に, 最高点に達した時 $\dot{x} = 0$ となるから, 最高点の高さを h とおくと, 初期の状態と最高点に達した時の間で全エネルギーが等しいことより,

$$-\frac{mag_0}{1 + \frac{h}{a}} = \frac{1}{2}mv_0^2 - mag_0$$

が成り立つ. これより,

$$h = \frac{av_0^2}{2ag_0 - v_0^2}$$

が得られる. ただし, $h > 0$ であるためには, 初速度は条件 $v_0 < \sqrt{2ag_0}$ を満足しなければならない. この場合, 全エネルギーは負値 ($E < 0$) である.

左上図に, ポテンシャルエネルギーの x 依存性を示す. $x = 0$ を初速度 v_0 で出発した質点は, $U \leq E$ の範囲を運動することができ, $E < 0$ の場合, $U = E$ となる位置 $x = h$ まで到達し得る. 従って, $0 \leq x \leq h$ が運動が可能な範囲である.

[2] 無限遠方に到達し得る場合について考える.

無限遠方 $x \rightarrow \infty$ に達した時の速度を $\dot{x} = v_\infty$ とおく. 初期の状態と無限遠方に達した時の間で全エネルギーが等しいことより, 等式,

$$\frac{1}{2}mv_\infty^2 = \frac{1}{2}mv_0^2 - mag_0$$

が成り立つ. この左辺の符号は正值確定であるから, 右辺は, 不等式,

$$\frac{1}{2}mv_0^2 - mag_0 > 0$$

を満足しなければならない. これが無限遠方に到達するための条件となる. この不等式は整理すると $v_0 > \sqrt{2ag_0}$ である.

この場合, $E > 0$ である. この時, $U = E$ となる解は存在しない (図参照) から, 運動可能な範囲は, $0 \leq x < \infty$ となる.

問題

5.3 質量 m の質点が、運動方程式、

$$m\ddot{x} = -\lambda e^{-ax}(1 - e^{-ax}) \quad (5.15)$$

に従って運動している。ここで、 λ, a は正の定数とする。

[1] 運動方程式より、エネルギー方程式を導出し、全エネルギーが保存することを示せ。

[2] 原点 $x = 0$ に速度 v_0 ($v_0 > 0$ とする) でおかれた質点が、 $x \rightarrow \infty$ に到達するために必要な v_0 の条件を求めよ。

[3] 位置 $x = x_0$ (ただし $x_0 < 0$ とする) に初速度 0 で置かれた場合、質点はどのような運動をするかを説明せよ。

5.1.6 運動の解法への応用

全エネルギーの保存の式 (例えば、例題 5.2 の (5.14) 式) は、初期の状態と任意の状態の間についての、座標と速度の関係式を与える。しかし、初期の状態から任意の状態へ移行するのに要する時間の情報は与えない。本小節では、全エネルギーの保存の式から、時間と座標の関係式を与える積分方程式を導出する。更に、運動方程式を直接解くのととは別の方法として、それを運動の解法に応用する。

全エネルギー E が一定の場合、(5.10) 式は、下式に帰着する。

$$t = t_0 + \int \frac{dx'}{\sqrt{\frac{2}{m}[E - U(x')]} \quad (5.16)$$

ここで、 $t = t_0$ は積分定数である。又、 $\dot{x} \geq 0$ と仮定した。この式を用いると、**運動方程式 (5.1) を直接解かなくても、時間 t を座標 x の関数として求めることができる。** この定式化の利点は、2 階常微分方程式としての運動方程式の解を求めることが困難な場合でも、(5.16) 右辺の積分を計算できれば、問題の解を求めることが可能となることにある。

関係式 (5.16) は、以下のように導出される。

簡単のため、 $\dot{x} = \frac{dx}{dt} > 0$ と仮定し、(5.10) を $\dot{x} = \frac{dx}{dt}$ について解くと、

$$\frac{dx}{dt} = \sqrt{\frac{2}{m}[E - U(x)]}$$

となる。これを、左辺は時間 t 、右辺は座標 x のみを含む形の**変数分離形**に変形する。

$$dt = \frac{dx}{\sqrt{\frac{2}{m}[E - U(x)]}}$$

左辺を t について、右辺を x について積分すると、(5.16) に帰着する。

例題

5.4 ポテンシャルエネルギーが、

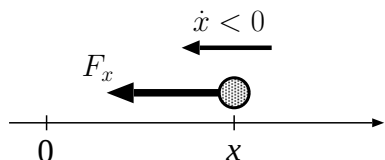
$$U = -\frac{k}{2x^2} \quad (5.17)$$

なる場のもとで、 x 軸の正の範囲を、質量 m の質点が運動する。ここで、 k は正の定数とする。

- [1] 初期に a の位置に、速度 0 で質点が置かれたとする．この場合の全エネルギー E を、定数 k と a を用いて表せ．
 [2] 位置 a を出発した質点が位置 x に到達するまでに要する時間を、(5.16) 式を用いて求めよ．

【解答】

力はポテンシャルエネルギーから (5.8) 式に従って導くことができるので、運動方程式は、



$$m\ddot{x} = -\frac{dU}{dx} = -\frac{k}{x^3} \quad (5.18)$$

と表される．2 階常微分方程式としてのこの運動方程式の解を直接求めることは困難である．

- [1] 全エネルギーは、

$$E = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 - \frac{k}{2x^2} \quad (5.19)$$

である．この表式に、初期条件 $x = a$, $\dot{x} = 0$ を代入すると、

$$E = -\frac{k}{2a^2} \quad (5.20)$$

が得られる．

- [2] (5.19), (5.20) より、全エネルギーの表式は、

$$\frac{1}{2}m\dot{x}^2 - \frac{k}{2x^2} = -\frac{k}{2a^2} \quad (5.21)$$

となる．運動方程式 (5.18) の右辺の符号が負である．初期に $x = a$ に置かれた質点は、引力を受けて原点へ向かって運動するので、 $\dot{x} \leq 0$ である．このことに留意して、(5.21) を $\dot{x} = \frac{dx}{dt}$ について解くと、

$$\dot{x} = \frac{dx}{dt} = -\sqrt{\frac{2}{m} \left(\frac{k}{2x^2} - \frac{k}{2a^2} \right)} = -\frac{1}{a} \sqrt{\frac{k}{m} \frac{\sqrt{a^2 - x^2}}{x}}$$

となる．これを**変数分離形**に変形する．

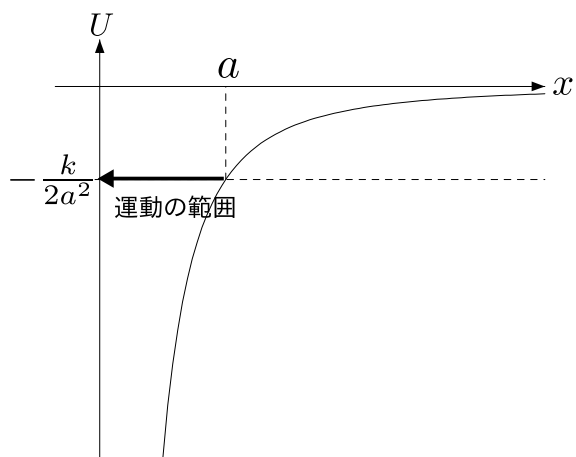
$$dt = -a \sqrt{\frac{m}{k}} \frac{x}{\sqrt{a^2 - x^2}} dx$$

左辺を t , 右辺を x について積分する．

$$t = -a \sqrt{\frac{m}{k}} \int \frac{x}{\sqrt{a^2 - x^2}} dx \quad (5.22)$$

(5.22) の被積分関数において、 $y = x^2$ と変数変換を施すと、

$$t = -\frac{a}{2} \sqrt{\frac{m}{k}} \int \frac{dy}{\sqrt{a^2 - y}}$$



となる．この積分は容易に計算でき，その結果は以下のようになる．

$$t = a\sqrt{\frac{m}{k}(a^2 - y)} + C = a\sqrt{\frac{m}{k}(a^2 - x^2)} + C$$

ここで C は積分定数である． $t = 0$ で $x = a$ なる初期条件を適用すると， $C = 0$ と定まる．従って，この初期条件を満足する解は，

$$t = a\sqrt{\frac{m}{k}(a^2 - x^2)}$$

である．これを x について解くと，

$$x = \sqrt{a^2 - \frac{k}{a^2 m} t^2}$$

となる．

上図に，ポテンシャルエネルギーの x 依存性を示す． $x = a$ を初速度 0 で出発した質点は，期間 $0 \leq t \leq a^2 \sqrt{\frac{m}{k}}$ に， $U \leq -\frac{k}{2a^2}$ の範囲，従って， $0 \leq x \leq a$ の範囲を運動し得る．そして，有限の時刻 $t = a^2 \sqrt{\frac{m}{k}}$ に $x = 0$ に到達する．

問題

5.5 重力定数 g の一様な重力場の場合，質量 m の質点の全エネルギーは，

$$\frac{1}{2}m\dot{x}^2 + mgx = \frac{1}{2}mv_0^2 \quad (5.23)$$

となる．ここで， x は座標， $\dot{x}$ は速度を表す．初期条件として， $t = 0$ で $x = 0$ ， $\dot{x} = v_0$ （ただし， $v_0 > 0$ ）とした． $\dot{x} > 0$ と仮定した時，例題 5.4[2] と同様の手順で，(5.23) を解き，任意の時刻 t における座標 x 求めよ．

5.1.7 保存力でない力

動摩擦力や抵抗力は保存力ではなく，これらの力が作用する形では，全エネルギーは保存しない．

5.1.7.1 抵抗力の場合

例として， x 軸上を，速度に比例した抵抗力を受けて運動する場合を考える．

速度を v とした時の運動方程式は，抵抗力の比例係数を γ とおくと，

$$m\dot{v} = -\gamma v \quad (5.24)$$

である．両辺に v を掛けることにより，運動エネルギー方程式，

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2}mv^2 \right) = -\gamma v^2$$

が導出される．右辺は負となり，運動エネルギー $\frac{1}{2}mv^2$ は減少する．

運動方程式 (5.24) について， $t = 0$ で $x = 0$ ， $\dot{x} = v_0$ なる初期条件を満たす速度の解は，

$$v = v_0 e^{-\frac{\gamma}{m}t}$$

となる。この解について、 $t = 0$ に運動を始めてから、 $t \rightarrow \infty$ に停止するまでの間に、抵抗がなす仕事の大きさ W を求める。

$$W = \gamma \int_0^\infty v^2 dt = \gamma v_0^2 \int_0^\infty e^{-\frac{2\gamma}{m}t} dt = \gamma v_0^2 \left[-\frac{m}{2\gamma} e^{-\frac{2\gamma}{m}t} \right]_0^\infty = \frac{1}{2} m v_0^2$$

これは初期 $t = 0$ に持つ運動エネルギーに等しい。

5.1.7.2 動摩擦力的場合

例として、動摩擦係数 μ' の粗い水平面上にとった x 軸上を、質量 m の質点に、一定の大きさの力を加えて、一定の速度で運動させる。力を与えて、原点 $x = 0$ を出発して、座標 $x = L$ まで運動させた後、逆向きの力を与えて、原点 $x = 0$ まで戻る。この時、動摩擦力がなす仕事を計算する。動摩擦力が保存力ならば、この仕事は 0 となるべきであるが、実際は保存力ではないので 0 とはならない。このことを示す。

原点 $x = 0$ から $x = L$ までの区間の運動方程式は、与える力の大きさを F とすると、

$$m\ddot{x} = F - \mu' mg$$

となる。動摩擦力がなす仕事 W_{f1} は、

$$W_{f1} = - \int_0^L \mu' mg dx = -\mu' mgL$$

となる。一方、 $x = L$ から $x = 0$ までの区間の運動方程式は、力が逆向きで、動摩擦力も運動の向きが逆向きなので、逆向きとなり、

$$m\ddot{x} = -F + \mu' mg$$

となる。動摩擦力がなす仕事 W_{f2} は、

$$W_{f2} = \int_L^0 \mu' mg dx = -\mu' mgL$$

となる。動摩擦力がなす仕事の和は、

$$W_{f1} + W_{f2} = -2\mu' mgL$$

となり、0 ではない。即ち、動摩擦力は保存力ではない。

問題

5.6 問題 2.2 と同様の配置であるが、斜面は動摩擦係数 μ' の粗い斜面とする。 x 軸を斜面に沿って、斜面を下る向きを正の向きとしてとる。動摩擦力は、斜面を下る向きに運動する場合 ($\dot{x} > 0$ の場合) と、斜面を上る向きに運動する場合 ($\dot{x} < 0$ の場合) で符号は異なるため、運動方程式は以下のように場合分けされる。

$$m\ddot{x} = \begin{cases} mg \sin \beta - \mu' mg \cos \beta & (\dot{x} > 0) \\ mg \sin \beta + \mu' mg \cos \beta & (\dot{x} < 0) \end{cases} \quad (5.25)$$

$t = 0$ に $x = 0$ の位置を速度 $\dot{x} = -v_0$ で斜面を上る向きに運動を始めた質点について、 $x = 0$ から最高点に達するまでの間と、最高点から $x = 0$ に戻るまでの間に分けて、重力がなす仕事と、動摩擦力がなす仕事を計算せよ。その結果から、重力は保存力であるが、動摩擦力は保存力でないことを確かめよ。

5.1.8 2つの質点の合体の場合

問題

5.7 直線上を速度 v_1 で運動する質量 m_1 の質点が、同じ直線上を速度 v_2 で運動する質量 m_2 の質点に衝突し、合体する。

[1] 2つの質点が合体した後の速度を、衝突前後で系の運動量が保存することを用いて求めよ。

[2] 衝突前と衝突後の運動エネルギーの差を求め、合体により系の運動エネルギーは保存しないことを示せ。

5.1.9 質量が変化する運動の場合

質量が変化する物体の運動の場合、物体に物質が付着する時、物体と物質の間には、内力が作用する。この場合、系の運動量は保存する。しかし、この内力は物体に対して仕事をするので、外力が 0 の場合でも、物体の運動エネルギーは保存しない。

このことを運動方程式 (3.6) に従う系について試みる。簡単のため、外力は作用しない $F = 0$ とする。この場合の (3.6) の両辺に v を掛け、変形すると、

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} m v^2 \right) = \left(\frac{1}{2} v^2 + V v \right) \frac{dm}{dt} \quad (5.26)$$

となる。質量が変化する場合 ($\frac{dm}{dt} \neq 0$ の場合)、外力が作用しなくても運動エネルギーは保存しない。

同様に、「例題 3.4 ロケットの運動」においても、運動エネルギーは保存しない。

問題

5.8 例題 3.2 の鎖の落下の運動の場合について、運動量方程式 (3.8) の両辺に速度 $\dot{x}$ を掛けることでエネルギー方程式を導出し、全エネルギーが保存しないことを示せ。

5.2 3次元の場合

第 5.1 節の 1 次元の場合の議論を、3 次元の場合に拡張する。

5.2.1 仕事とエネルギー

見やすいように、運動方程式 (2.1) を速度 $\mathbf{v} = \dot{\mathbf{r}}$ で表す。

$$m\dot{\mathbf{v}} = \mathbf{F} \quad (2.1)'$$

この両辺に対して、速度 $\mathbf{v}$ とのスカラー積をとる。

$$m\mathbf{v} \cdot \dot{\mathbf{v}} = \mathbf{F} \cdot \mathbf{v} \quad (5.27)$$

ここで、スカラー積の微分に関する公式 (0.15b) によると、

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}) &= \frac{d\mathbf{v}}{dt} \cdot \mathbf{v} + \mathbf{v} \cdot \frac{d\mathbf{v}}{dt} \\ \therefore \mathbf{v} \cdot \dot{\mathbf{v}} &= \frac{1}{2} \frac{d}{dt}(\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}) \end{aligned}$$

となるから, (5.27) は,

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} m \mathbf{v} \cdot \mathbf{v} \right) = \mathbf{F} \cdot \mathbf{v}, \quad (5.28)$$

と変形することができる. 3次元の場合, 運動エネルギーは, 速度ベクトルのスカラー積を用いて,

$$K = \frac{1}{2} m \mathbf{v} \cdot \mathbf{v}$$

で定義される. (5.28) の右辺は, 力 $\mathbf{F}$ が単位時間あたりになす仕事 (仕事率) を表す.

今, 質点が, 時刻 t_0 における位置 $\mathbf{r}_0$ から, 時刻 t における位置 $\mathbf{r}$ まで移動したとする. この時, (5.28) を時間について t_0 から t まで積分すると,

$$\frac{1}{2} m \mathbf{v} \cdot \mathbf{v} - \frac{1}{2} m \mathbf{v}_0 \cdot \mathbf{v}_0 = \int_{t_0}^t \mathbf{F} \cdot \dot{\mathbf{r}} dt \quad (5.29)$$

となる. ここで, 時刻 t_0, t における速度をそれぞれ $\mathbf{v}_0, \mathbf{v}$ とおいた. 右辺は, 力 $\mathbf{F}$ のなす仕事を表す. 左辺は時刻 t_0 と時刻 t の運動エネルギーの差を表す. 運動エネルギーの変化はなされた仕事に等しい.

座標系としてデカルト座標系を用いた場合を考える. 速度の x, y, z 成分をそれぞれ v_x, v_y, v_z とすると, 速度ベクトルは,

$$\mathbf{v} = v_x \mathbf{e}_x + v_y \mathbf{e}_y + v_z \mathbf{e}_z \quad (5.30)$$

と表される. 又, 力の x, y, z 成分をそれぞれ F_x, F_y, F_z とすると, 力のベクトルは,

$$\mathbf{F} = F_x \mathbf{e}_x + F_y \mathbf{e}_y + F_z \mathbf{e}_z$$

と表される. この場合, 速度ベクトルと速度ベクトルのスカラー積は,

$$\mathbf{v} \cdot \mathbf{v} = v_x^2 + v_y^2 + v_z^2,$$

力のベクトルと速度ベクトルのスカラー積は,

$$\mathbf{F} \cdot \mathbf{v} = F_x v_x + F_y v_y + F_z v_z$$

となる. 従って, 3次元デカルト座標系の場合のエネルギー方程式は,

$$\frac{d}{dt} \left[\frac{1}{2} m (v_x^2 + v_y^2 + v_z^2) \right] = F_x v_x + F_y v_y + F_z v_z$$

となる.

5.2.2 保存力とポテンシャルエネルギー

1次元の場合と同様, 力 $\mathbf{F}$ が位置ベクトル $\mathbf{r}$, 即ち座標 (x, y, z) のみに依存し, 速度や時間には依存しない場合を考える. この時, 仕事を表す (5.29) 右辺,

$$W = \int_{t_0}^t \mathbf{F} \cdot \mathbf{v} dt$$

について考える. 速度の成分を座標の時間微分, $\mathbf{v} = \left(\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt} \right)$ で表すと,

$$W = \int_{t_0}^t \left(F_x \frac{dx}{dt} + F_y \frac{dy}{dt} + F_z \frac{dz}{dt} \right) dt$$

であるが、力が座標 (x, y, z) のみの関数の場合、

$$W = \int_{P_0}^P (F_x dx + F_y dy + F_z dz)$$

と表すことができる。即ち積分は、点 P_0 から P までの軌道に沿った線積分で表すことができる。特に、

$$F_x dx + F_y dy + F_z dz = -dU$$

となるような、座標 (x, y, z) のみのスカラー関数 U が存在する場合、

$$W = - \int_{P_0}^P dU = U(x_0, y_0, z_0) - U(x, y, z)$$

となり、仕事は、2点 P_0, P の座標のみで決まる。この性質を持つ力を保存力という。

$$F_x dx + F_y dy + F_z dz = -dU$$

を満足する、座標 (x, y, z) のみの関数 U が存在する条件は、

$$F_x = -\frac{\partial U}{\partial x}, \quad F_y = -\frac{\partial U}{\partial y}, \quad F_z = -\frac{\partial U}{\partial z}, \quad (5.31)$$

の様に、力が関数 U の勾配から導かれることである。

5.2.3 全エネルギーとその保存

力がポテンシャルエネルギー U から導かれる場合、(5.28) の右辺は、

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} m \mathbf{v} \cdot \mathbf{v} \right) = - \left(\frac{\partial U}{\partial x} \dot{x} + \frac{\partial U}{\partial y} \dot{y} + \frac{\partial U}{\partial z} \dot{z} \right) = - \frac{dU}{dt}$$

と変形できるから、

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} m \mathbf{v} \cdot \mathbf{v} + U \right) = 0,$$

に帰着する。これは、運動エネルギーとポテンシャルエネルギー U の和で定義される全エネルギー、

$$E = \frac{1}{2} m \mathbf{v} \cdot \mathbf{v} + U$$

が保存することを意味する。

5.2.3.1 例：一様な重力が作用する場合

例題 2.1 と同じ設定の問題を考える。

運動方程式の x 成分 (2.8a) に速度の x 成分 $\dot{x}$ を掛けた式と、 y 成分 (2.8b) に速度の y 成分 $\dot{y}$ を掛けた式の和をとると、

$$m(\ddot{x}\dot{x} + \ddot{y}\dot{y}) = -mg\dot{y}$$

$$\frac{d}{dt} \left[\frac{1}{2} m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + mgy + U_0 \right] = 0$$

が得られる。ここで U_0 は積分定数である。重力によるポテンシャルエネルギー U は、

$$U = mgy + U_0$$

で与えられる。高さ 0 ($y = 0$) でポテンシャルエネルギーが 0 となるように積分定数を決めると、 $U_0 = 0$ と定まる。よって、ポテンシャルエネルギーは、

$$U = mgy,$$

全エネルギーは、

$$E = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + mgy$$

となる。 $\frac{dE}{dt} = 0$ より全エネルギーは保存する。

5.2.3.2 力が座標の関数の場合

[1] 変位に比例した復元力が作用する場合

変位に比例した復元力が作用する場合を考える。 k をこの比例定数とする。運動方程式は、

$$m\dot{\mathbf{v}} = -k\mathbf{r}$$

である。両辺に速度 $\mathbf{v} = \dot{\mathbf{r}}$ とのスカラー積を取り、変形する。

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} m \mathbf{v} \cdot \mathbf{v} \right) = -k \mathbf{r} \cdot \dot{\mathbf{r}}$$

となる。右辺は、

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} m \mathbf{v} \cdot \mathbf{v} \right) = -\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} k \mathbf{r} \cdot \mathbf{r} + U_0 \right)$$

と変形できる。ここで U_0 は積分定数である。従って、

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} m \mathbf{v} \cdot \mathbf{v} + \frac{1}{2} k \mathbf{r} \cdot \mathbf{r} + U_0 \right) = 0$$

に帰着する。変位に比例した復元力によるポテンシャルエネルギー U は、 $\mathbf{r} = \mathbf{0}$ でポテンシャルエネルギーが 0 となるように積分定数を決めると、

$$U = \frac{1}{2} k \mathbf{r} \cdot \mathbf{r}$$

全エネルギーは、

$$E = \frac{1}{2} m \mathbf{v} \cdot \mathbf{v} + \frac{1}{2} k \mathbf{r} \cdot \mathbf{r}$$

となり、 $\frac{dE}{dt} = 0$ より保存する。

[2] 万有引力が作用する場合

G を万有引力定数, M を原点に置かれた物体の質量でこの物体は静止しているとする. 質量 m の質点の運動方程式は,

$$m\dot{\mathbf{v}} = -GMm\frac{\mathbf{r}}{r^3}$$

となる. $r = |\mathbf{r}|$ は位置ベクトルの大きさ, 又は, 原点から質点までの距離, $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ である. r のみに依存する関数

$$f(r) = \frac{1}{r}$$

に対して,

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}\right) = \left(-\frac{x}{r^3}, -\frac{y}{r^3}, -\frac{z}{r^3}\right)$$

となる. このことより,

$$U = -GMm\frac{1}{r}$$

とすれば, 万有引力 $\left(-GMm\frac{x}{r^3}, -GMm\frac{y}{r^3}, -GMm\frac{z}{r^3}\right)$ は, $\left(-\frac{\partial U}{\partial x}, -\frac{\partial U}{\partial y}, -\frac{\partial U}{\partial z}\right)$ より導かれる. 即ち, この関数 U は, 万有引力のポテンシャルエネルギーである.

5.3 仕事をしない力

速度 $\mathbf{v}$ に対して垂直に作用する力 $\mathbf{F}$ は, スカラー積 $\mathbf{v} \cdot \mathbf{F} = 0$ であるから, 仕事率が 0 となり, 仕事をしない. このような力の例として, 振り子の張力, ローレンツ力やコリオリ力があげられる. 振り子の張力に関しては, 「第 6 章 束縛運動」で取り上げる. コリオリ力に関しては, 「一般力学 II」の「非慣性系における運動」で取り上げる.

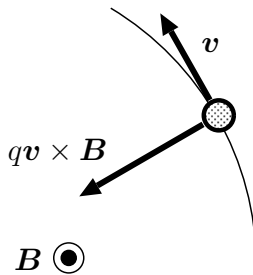


図 5.1. 磁束密度 $\mathbf{B}$ の磁場のなかでの電荷 q の荷電粒子の運動. 磁束密度は紙面に垂直で上向きとする.

5.9 磁束密度 (ベクトル) $\mathbf{B}$ の磁場のなかで, 速度 (ベクトル) $\mathbf{v}$ で運動する, 電荷 q の荷電粒子はローレンツ力 $q\mathbf{v} \times \mathbf{B}$ を受ける. ここで $\times$ はベクトル積を表す. 電場が存在せず, 更に, 重力等の外力が存在しない場合, 質量 m の粒子の運動方程式は,

$$m\frac{d\mathbf{v}}{dt} = q\mathbf{v} \times \mathbf{B} \quad (5.32)$$

となる.

- [1] 方程式 (5.32) に対して, ベクトル $\mathbf{v}$ とのスカラ積をとることで, エネルギー方程式を導出し, 運動エネルギーが保存することを示せ.
- [2] 運動エネルギーが保存するのはローレンツ力のどのような性質によるのか, 説明せよ.

第6章 束縛運動

本章では円周上に束縛された運動について考える。本章は又、2次元極座標系の実際の問題への適用でもある。

6.1 2次元極座標系における運動方程式

座標系には2次元極座標系を用いる。運動は xy 平面上に限られるとする。 r を原点から質点までの距離、 θ を、原点と質点を結ぶ線分の x 軸の正の向きに対するなす角とする。第2.3.3.2節で示したように、運動方程式は以下の形となる。

$$m(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2) = F_r, \quad (2.7a)$$

$$m\frac{1}{r}\frac{d}{dt}(r^2\dot{\theta}) = F_\theta. \quad (2.7b)$$

ここで F_r, F_θ は、それぞれ、力の動径成分、角成分である。

6.2 2次元極座標系におけるエネルギー論

6.2.1 2次元極座標系におけるエネルギー方程式

運動方程式の動径成分 (2.7a) に、速度の動径成分 $\dot{r}$ をかけた式と、運動方程式の角成分 (2.7b) に、速度の角成分 $r\dot{\theta}$ をかけた式の和を取る。その結果、2次元極座標系におけるエネルギー方程式が、以下の形で求まる。

$$\frac{d}{dt} \left[\frac{1}{2} m (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2) \right] = F_r \dot{r} + F_\theta r \dot{\theta} \quad (6.1)$$

2次元極座標系では運動エネルギーは、

$$K = \frac{1}{2} m (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2) \quad (6.2)$$

なる形で定義される。

6.2.2 2次元極座標系における保存力とポテンシャルエネルギー

力 (F_r, F_θ) について、

$$F_r dr + F_\theta r d\theta = -dU \quad (6.3)$$

となるような、座標 (r, θ) のみの関数 U が存在する場合、即ち、力が**保存力**の場合を考える。関係式 (6.3) を満足する、座標 (r, θ) のみの関数 U が存在する条件は、

$$F_r = -\frac{\partial U}{\partial r}, \quad F_\theta = -\frac{1}{r} \frac{\partial U}{\partial \theta},$$

の様に、力が関数 U の勾配から導かれることである。この U をポテンシャルエネルギーという。

6.2.3 2次元極座標系における全エネルギーとその保存

力がポテンシャルエネルギー U から導かれる場合, (6.1) の右辺は,

$$\frac{d}{dt} \left[\frac{1}{2} m (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2) \right] = F_r \dot{r} + F_\theta r \dot{\theta} = - \left(\frac{\partial U}{\partial r} \dot{r} + \frac{\partial U}{\partial \theta} \dot{\theta} \right) = - \frac{dU}{dt}$$

と変形できるから,

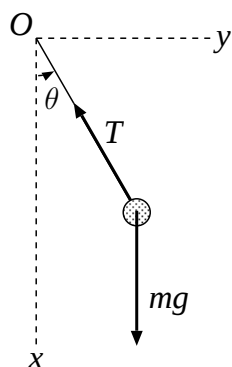
$$\frac{d}{dt} \left[\frac{1}{2} m (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2) + U \right] = 0, \quad (6.4)$$

に帰着する. これは, 運動エネルギーとポテンシャルエネルギー U の和で定義される全エネルギー,

$$E = \frac{1}{2} m (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2) + U \quad (6.5)$$

が保存することを意味する.

6.3 円周上に束縛された運動

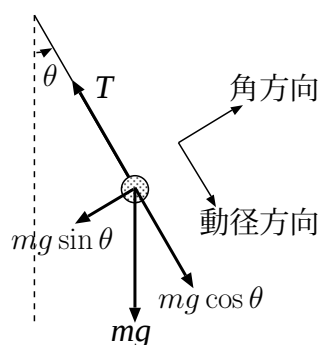


例題

6.1 長さ l の質量の無視できる糸に質量 m の質点をつけた振子が, 鉛直面内に吊されている. 質点が最下点にある時, その速度を v_0 として, 以下の問いに答えよ. ただし, 鉛直下向きには一様な重力が働いている. 抵抗は考えない.

- [1] 振子の運動方程式を, 極座標系を用いて示せ. ただし, 角度 θ は, 左図に示したように, 鉛直下方からの糸のなす角をとする.
- [2] エネルギー方程式を導出し, 全エネルギーの表式を求めよ.
- [3] 糸の張力を, 角度の関数として求めよ.
- [4] 質点が一回転して元の位置 (最下点) に戻ってくるために必要な v_0 の条件を求めよ.

【解答】



[1] 鉛直下向きから反時計回りにはかった, 質点の位置ベクトルがなす角度を θ とおく.

動径方向に関しては, 外向きに重力の分力 $mg \cos \theta$ が, 内向きに糸の張力 T が作用する. 一方, 角方向に関しては, 時計回りに重力の分力 $mg \sin \theta$ が作用する. 従って, 極座標系で表した質点の運動方程式は,

$$-ml\dot{\theta}^2 = mg \cos \theta - T \quad (6.6a)$$

$$ml\ddot{\theta} = -mg \sin \theta \quad (6.6b)$$

となる. ここで $r = l$ は一定であることを考慮した.

[2] (6.6b) の両辺に速度の角成分 $l\dot{\theta}$ を掛け, 変形する.

$$ml^2\dot{\theta}\ddot{\theta} = -mgl\dot{\theta}\sin \theta$$

$$ml^2 \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} \dot{\theta}^2 \right) = -mgl \frac{d}{d\theta} \left(\int \sin \theta d\theta \right) \cdot \frac{d\theta}{dt}$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} ml^2 \dot{\theta}^2 \right) = -mgl \frac{d}{d\theta} (-\cos \theta + U_0) \cdot \frac{d\theta}{dt}$$

$$= -mgl \frac{d}{dt} (-\cos \theta + U_0)$$

$$\therefore \frac{d}{dt} \left[\frac{1}{2} ml^2 \dot{\theta}^2 + mgl(-\cos \theta + U_0) \right] = 0$$

ここで、 U_0 は積分定数である。左辺 $[\dots]$ 内の $mgl(-\cos \theta + U_0)$ の項がポテンシャルエネルギーを表す。 $\theta = 0$ でポテンシャルエネルギーが 0 となるように基準を決めると、 $U_0 = 1$ と定まる。従って、上式は、

$$\frac{d}{dt} \left[\frac{1}{2} ml^2 \dot{\theta}^2 + mgl(1 - \cos \theta) \right] = 0 \quad (6.7)$$

と表される。この式は、運動エネルギー $\frac{1}{2} ml^2 \dot{\theta}^2$ とポテンシャルエネルギー $mgl(1 - \cos \theta)$ の和で定義される全エネルギー、

$$E = \frac{1}{2} ml^2 \dot{\theta}^2 + mgl(1 - \cos \theta) \quad (6.8)$$

が保存することを意味する。

(6.7) 式の導出で運動方程式の動径成分を使わなかった。円周上に運動が束縛されている場合、質点は動径方向には運動しない。この場合、 $\dot{r} = 0$ である。力の動径成分である抗力及び重力の分力は仕事をしないから、運動方程式の動径成分はエネルギーに関与しない。

[3] 質点が最下点にある状態 $\theta = 0$, $\dot{\theta} = \frac{v_0}{l}$ と、任意の角度にある状態 $\theta = \theta$, $\dot{\theta} = \dot{\theta}$ との間で全エネルギー (6.8) が等しいことを適用すると、等式、

$$\frac{1}{2} ml^2 \dot{\theta}^2 + mgl(1 - \cos \theta) = \frac{1}{2} mv_0^2 \quad (6.9)$$

が成り立つ。これより、

$$ml\dot{\theta}^2 = \frac{mv_0^2}{l} - 2mg(1 - \cos \theta)$$

となる。これを (6.6a) に代入する。

$$-\frac{mv_0^2}{l} + 2mg(1 - \cos \theta) = mg \cos \theta - T$$

これを T について解くと、

$$T = \frac{mv_0^2}{l} + mg(3 \cos \theta - 2)$$

が得られる。

[4] おもりが一回転して元の位置に戻ってくるためには、任意の θ に対して $T > 0$, 即ち、

$$\frac{mv_0^2}{l} + mg(3 \cos \theta - 2) > 0$$

でなければならない．これを变形すると，

$$\cos \theta > \frac{2gl - v_0^2}{3gl}$$

となる．ところで， $-1 \leq \cos \theta \leq 1$ であるから，この条件式は，

$$-1 > \frac{2gl - v_0^2}{3gl}$$

に帰着する．これを变形すると，

$$v_0 > \sqrt{5gl} \quad (6.10)$$

となる．

ところで，おもりが一回転して元の位置に戻ってくるためには，任意の θ に対して運動エネルギーが正でなければならないという条件も必要である．この条件は (6.9) より

$$\frac{1}{2}ml^2\dot{\theta}^2 = \frac{1}{2}mv_0^2 - mgl(1 - \cos \theta) > 0$$

よって，

$$\cos \theta > \frac{2gl - v_0^2}{2gl}$$

と書き換えられる．やはり， $-1 \leq \cos \theta \leq 1$ であるから，この条件式は，

$$-1 > \frac{2gl - v_0^2}{2gl}$$

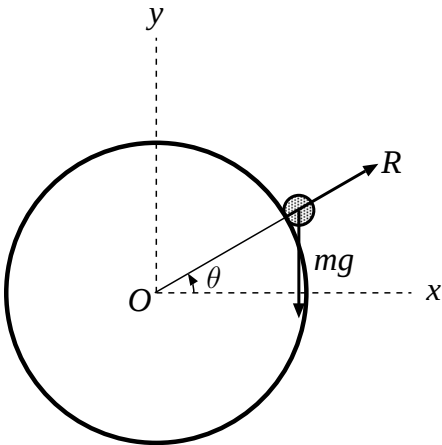
に帰着する．これを变形すると，

$$v_0 > \sqrt{4gl} \quad (6.11)$$

となる．先に $T > 0$ となることから求めた条件 (6.10) はこの条件を満足している．従って，おもりが一回転して元の位置に戻ってくるために必要な v_0 の条件は，

$$v_0 > \sqrt{5gl} \quad (6.10)$$

となる．



問題

6.2 左図に示すように，鉛直面内におかれた半径 r_0 の円周上を質点が運動している．鉛直下方には一様な重力が働いている．抵抗は考えない．

- [1] この質点の運動方程式を，極座標系を用いて示せ．
- [2] エネルギー方程式を導出し，全エネルギーの表式を求めよ．
- [3] 時刻 $t = 0$ に円の最高点 ($x = 0, y = r_0$) を，質点は初速度 0 で出発するとする．この場合について，全エネルギーの値を求めよ．
- [4] 上記の場合について，抗力を角度の関数として求めよ．
- [5] 質点が，円を離れる時の角度を求めよ．

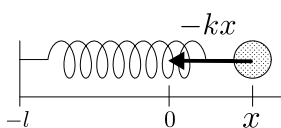
第7章 振動論

本章では、変位に比例した復元力が作用する場合に起こる、振動現象を取り扱う。振動現象は、自然現象、工学的現象において幅広く広く見られる。例えば、海洋の潮汐による水位の変動や、地震による建物の揺れといった現象である。内容は、次の3つの事項からなる。1つ目は単振動である。これは抵抗、外力の作用のない、自由振動である。2つ目は減衰振動である。これは、振動子に抵抗力が作用する場合の現象で、減衰振動の他、過減衰、臨界減衰と呼ばれる運動形態がある。3つ目は強制振動である。これは外力が作用する場合の振動現象である。周期的な外力による強制振動には、共鳴、うなりといった特徴的な現象が存在する。又、周期的な外力による強制振動では、外力の振動数と固有振動数との関係（振動数特性）が重要となる。なお、本章では、第0.2.3節で説明した、定数係数の2階微分方程式の解法を必要とする。

7.1 単振動の例

7.1.1 バネ

質量 m の質点を、バネ定数 k 、自然長 l のバネの一端に取り付け、バネの他端を滑らかな水平面において固定する。バネの自然長の位置を原点 O として、水平方向に x 軸をとる。自然長からの変位が x の時、変位が小さいならば、質点には**変位に比例した復元力 $-kx$** が作用する（ただし $k > 0$ ）。この場合、運動方程式は、

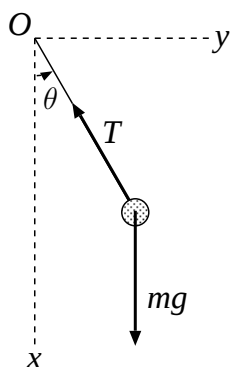


$$m\ddot{x} = -kx, \quad (7.1)$$

となる。このように、自然長からバネを変位させた時、振動の運動が起こる。

線形性の仮定

変位が小さいと仮定したことは、線形性を仮定したことになる。力が変位 x の1次関数の場合、方程式は線形であるという。この場合、解の重ね合わせの原理が成り立つ。変位が大きい場合、復元力は、 a を定数として、 $-kx + ax^3$ のように、変位の3乗の項（非線形項）も考える必要がある。



7.1.2 振り子

第6章 第6.3節の例題6.1の振り子を取り上げる。極座標系で表したその運動方程式は、

$$-ml\dot{\theta}^2 = mg \cos \theta - T, \quad (6.6a)$$

$$ml\ddot{\theta} = -mg \sin \theta, \quad (6.6b)$$

であった。

ここで、糸の傾き角 θ は微小と仮定する（線形性の仮定）。この場合、sine 関数、cosine 関数は、テーラー展開の最初の項のみで、

$$\sin \theta = \theta - \frac{1}{6}\theta^3 + \frac{1}{120}\theta^5 + \cdots \simeq \theta,$$

$$\cos \theta = 1 - \frac{1}{2}\theta^2 + \frac{1}{24}\theta^4 + \cdots \simeq 1,$$

と近似することができる。又、 θ の 2 次項 $\dot{\theta}^2$ は無視することができる。この結果、運動方程式は、以下の形に近似される。

$$0 = mg - T,$$

$$ml\ddot{\theta} = -mg\theta.$$

運動方程式の動径成分は糸の張力を与える。運動方程式の角成分は、

$$\ddot{\theta} = -\frac{g}{l}\theta \quad (7.2)$$

となる。これは変位 θ に比例した復元力が作用する運動である。

非線形の振り子

$\sin \theta$ のテーラー展開において、 θ^3 の項まで考慮し、

$$\sin \theta \simeq \theta - \frac{1}{6}\theta^3$$

と近似すると、(6.6b) は、

$$\ddot{\theta} = -\frac{g}{l}\theta + \frac{g}{6l}\theta^3 \quad (7.3)$$

と近似される。非線形の振動子の一例である。

7.2 単振動の解とその性質

以上の例で示したように、**変位に比例した復元力**を受けた運動を単振動と言う。

7.2.1 単振動の解

バネの運動方程式 7.1 を定数、

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

を用いて書き換える。

$$\ddot{x} = -\omega_0^2 x \quad (7.4)$$

数学的には、運動方程式は、座標 x を従属変数とした、**定数係数の 2 階の常微分方程式**となる。

第 0.2.3 節で説明した解法より、(7.4) の一般解は、

$$x = C_1 \cos \omega_0 t + C_2 \sin \omega_0 t \quad (7.5)$$

となる。ここで、 C_1, C_2 は任意定数である。

7.2.2 単振動の解の性質

一般解 (7.5) は, cosine 関数のみを用いて,

$$x = A \cos(\omega_0 t + \delta) \quad (7.6)$$

のように書き換えることもできる (sine 関数のみを用いてもよい). これは, $|x| \leq A$ の間の, 一定の周期の振動を表し, 単振動と呼ばれる.

ここで, 変位の大きさ $|x|$ の最大値,

$$A = \sqrt{C_1^2 + C_2^2}$$

を**振幅**と呼ぶ. cosine 関数の引数,

$$\omega_0 t + \delta$$

を**位相**と呼ぶ. これは, 振動の状態 (例えば, 変位が最大となるか, あるいは 0 となるか等) を角度の次元で表したものになる. 特に, $t = 0$ の時の位相,

$$\delta = -\tan^{-1}\left(\frac{C_2}{C_1}\right)$$

を**初期位相**と呼ぶ.

$\cos(\omega_0 t + \delta)$ が同じ値に戻る最小の時間 T_0 , 即ち, $\cos(\omega_0 t + \delta) = \cos[\omega_0(t + T_0) + \delta]$ を満足する最小の時間 T_0 を, **固有周期**と呼ぶ. $\omega_0 T_0 = 2\pi$ を満たすので,

$$T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0} \quad (7.7)$$

となる.

ω_0 を**固有角振動数**と呼ぶ. 時間 T_0 で 2π 位相が変わるので, 単位時間あたりの位相の変化は $\frac{2\pi}{T_0}$ となるが, これが固有角振動数 ω_0 になる.

時間 T_0 で振動子は 1 回振動するので, 単位時間あたりの振動の数は, その逆数 $\frac{1}{T_0}$ となる. これを**固有振動数**と呼ぶ. 固有振動数 ω_0 を用いると, $\frac{\omega_0}{2\pi}$ と表される.

固有周期は, バネの場合,

$$T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$$

振り子の場合,

$$T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$$

となり, 振幅には依存しない. この性質を等時性という. 等時性は自明のことではなく, 非線形の振動では成り立たない.

問題

7.1 単振動の運動方程式 (7.4) の一般解を求めよ.

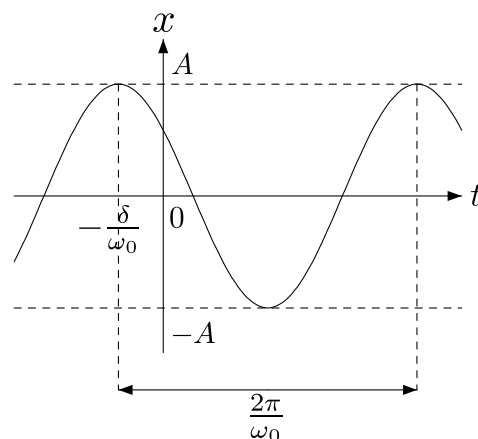


図 7.1: 単振動子の変位 (7.6) の時間依存性.

7.2.3 解の重ね合わせ

ϕ_1, ϕ_2 が方程式,

$$\ddot{x} = -\omega_0^2 x \quad (7.4)$$

の特解であるとする. 実際は, $\phi_1 = e^{i\omega_0 t}$, $\phi_2 = e^{-i\omega_0 t}$ 又は $\phi_1 = \cos \omega_0 t$, $\phi_2 = \sin \omega_0 t$ であるが, 見やすいよう, 記号でおく.

$$\frac{d^2 \phi_1}{dt^2} = -\omega_0^2 \phi_1, \quad (7.8a)$$

$$\frac{d^2 \phi_2}{dt^2} = -\omega_0^2 \phi_2. \quad (7.8b)$$

この時, 2つの解の重ね合わせ (一次結合),

$$x = C_1 \phi_1 + C_2 \phi_2 \quad (7.9)$$

も (7.4) の解である. ここで C_1, C_2 は任意定数である. このことは, (7.8a)× C_1 + (7.8b)× C_2 より,

$$\frac{d^2}{dt^2} (C_1 \phi_1 + C_2 \phi_2) = -\omega_0^2 (C_1 \phi_1 + C_2 \phi_2)$$

となることから確かめることができる.

方程式 (7.4) の2つの特解の重ね合わせ (7.9) が (7.4) の解となることは, 方程式 (7.4) が x について1次の項のみを含む, 即ち, 線形であることによる.

解の重ね合わせが成り立たない場合

方程式が (7.4) とは異なり,

$$\ddot{x} = -\omega_0^2 x + ax^3 \quad (7.10)$$

のように, 非線形項 (x について2次以上の項) が存在するとする.

ϕ_1, ϕ_2 がこの方程式の解であっても, その重ね合わせ,

$$x = C_1 \phi_1 + C_2 \phi_2 \quad (7.9)$$

は (7.10) の解とはならない. 実際,

$$\ddot{\phi}_1 = -\omega_0^2 \phi_1 + a\phi_1^3,$$

$$\ddot{\phi}_2 = -\omega_0^2 \phi_2 + a\phi_2^3,$$

あるが,

$$\frac{d^2}{dt^2} (C_1 \phi_1 + C_2 \phi_2) \neq -\omega_0^2 (C_1 \phi_1 + C_2 \phi_2) + a (C_1 \phi_1 + C_2 \phi_2)^3$$

である.

7.3 減衰振動

7.3.1 運動方程式

質点が復元力 $-kx$ の他に、速度に比例した抵抗力 $-\gamma\dot{x}$ ($\gamma > 0$) を受ける時、運動方程式は、

$$m\ddot{x} = -kx - \gamma\dot{x}$$

となる。便宜上、運動方程式の両辺を m で割り、固有角振動数 ω_0 と、

$$\alpha = \frac{\gamma}{2m}$$

で定義した減衰定数 α を用いて、書き換える。

$$\ddot{x} = -\omega_0^2 x - 2\alpha\dot{x} \quad (7.11)$$

7.3.2 特性方程式の解

(7.11) の特解を $e^{\lambda t}$ とおき、特性方程式を求めると、

$$\lambda^2 + 2\alpha\lambda + \omega_0^2 = 0$$

となる。特性方程式の解は、

$$\lambda = -\alpha \pm \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2} \quad (7.12)$$

となる。この解は、判別式 $\alpha^2 - \omega_0^2$ の符号に応じて、3 つに分類される。

(i) $\omega_0 > \alpha$ の場合

(7.12) の根号の中は負であるから、特性方程式の解は複素数となる。この解は、虚数単位 $i = \sqrt{-1}$ を用いて、

$$\lambda = -\alpha \pm i\sqrt{\omega_0^2 - \alpha^2} \quad (7.13)$$

と表される。

(ii) $\alpha > \omega_0$ の場合

(7.12) の根号の中は正であるから、特性方程式の解は、相異なる 2 つの実数解となる。

(iii) $\alpha = \omega_0$ の場合

(7.12) の根号の中は 0 であるから、特性方程式の解は、1 つの実数解（即ち、重解） $\lambda = -\alpha$ となる。

7.3.3 抵抗力が作用する振動子の解

7.3.3.1 $\omega_0 > \alpha$ の場合：減衰振動

[1] 一般解

便宜上、角振動数の次元を持つ定数、

$$\omega_d = \sqrt{\omega_0^2 - \alpha^2} \quad (7.14)$$

を導入すると、特性方程式の解は、

$$\lambda = -\alpha \pm i\omega_d$$

とおける。この場合、第 0.2.3 節で説明したように、一般解は、

$$x = e^{-\alpha t} (C_1 \cos \omega_d t + C_2 \sin \omega_d t) \quad (7.15)$$

となる。ここで C_1, C_2 は任意定数である。

[2] 解の性質

解の性質を考察しやすいよう、特定の初期条件を満たす解を求める。 $t = 0$ で $x = A, \dot{x} = 0$ なる初期条件を適用すると、

$$C_1 = A, \quad C_2 = \frac{\alpha}{\omega_d} A$$

と定まる。よって、この初期条件を満足する解は、

$$x = Ae^{-\alpha t} \left(\cos \omega_d t + \frac{\alpha}{\omega_d} \sin \omega_d t \right) \quad (7.16)$$

である。

この解の時間依存性は、右図 7.2 のようになる。速度が 0 となる、即ち、変位が極値をとる時刻は、

$$\omega_d t = \pi n \quad (n = 0, 1, 2, \dots)$$

を満足する。この時刻では、変位は、

$$x = \pm Ae^{-\alpha t}$$

となる。この変位が極大となる点、あるいは、極小となる点を結んだ曲線を、同図に点線で示す。この曲線は包絡線と呼ばれる。

この解は、周期 $T_d = \frac{2\pi}{\omega_d}$ で振動を繰り返しながら、振幅が $e^{-\alpha t}$ に従って指数関数的に減衰するという特徴を持つ。このような振動を、減衰振動と呼ぶ。ここで、 αT_d は 1 周期あたりの振幅の減少率を無次元数として表したもので、対数減衰率と呼ばれる。復元力と比べて、抵抗力の影響が小さいため、振動が繰り返される。

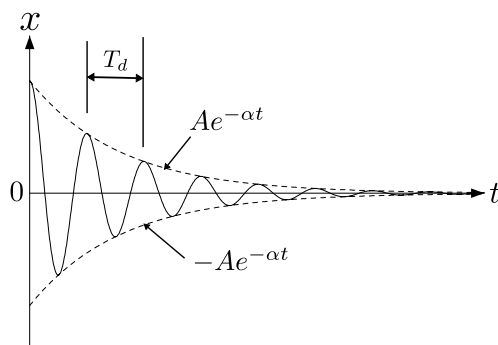


図 7.2. 減衰振動子（減衰振動の場合）の変位の時間依存性。点線は包絡線で、振幅が $\pm Ae^{-\alpha t}$ に従って減衰することを示す。

7.3.3.2 $\alpha > \omega_0$ の場合: 過減衰

[1] 一般解

便宜上、定数、

$$\beta = \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2} \quad (7.17)$$

を導入する。その場合、特性方程式の解は、

$$\lambda = -\alpha \pm \beta$$

とおける。第 0.2.3 節で説明したことから、(7.11) の一般解は、 C_1, C_2 を任意定数として、

$$x = e^{-\alpha t} (C_1 e^{\beta t} + C_2 e^{-\beta t}) \quad (7.18)$$

なる形に表される。

[2] 解の性質

解の性質を考察しやすいよう、 $t = 0$ で $x = A$, $\dot{x} = 0$ なる初期条件を適用すると、

$$C_1 = \frac{\alpha + \beta}{2\beta}A, \quad C_2 = -\frac{\alpha - \beta}{2\beta}A,$$

と定まる。よって、この初期条件を満足する解は、

$$x = Ae^{-\alpha t} \left(\frac{\alpha + \beta}{2\beta} e^{\beta t} - \frac{\alpha - \beta}{2\beta} e^{-\beta t} \right) \quad (7.19)$$

である。

この解の時間依存性は、右図 7.3 の実線のようになる。常に $\dot{x} < 0$ であるから、**単調減少で、振動することはない**。又、 $t \rightarrow \infty$ で $x \rightarrow 0$ である。このような運動を**過減衰**と呼ぶ。復元力と比べて、抵抗力の影響が大きいため、**振動は起こらない**。

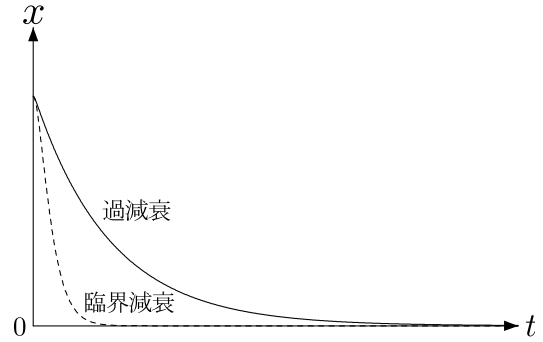


図 7.3: 減衰振動子の変位の時間依存性。実線は過減衰、点線は臨界減衰の場合。臨界減衰の方が過減衰より速やかに 0 に近づくことがわかる。

7.3.3.3 $\omega_0 = \alpha$ の場合: 臨界減衰

[1] 一般解

特性方程式が重解 $\lambda = -\alpha$ を持つ場合、第 0.2.3 節で説明したように、特解は $e^{-\alpha t}$ と $te^{-\alpha t}$ になる。よって、一般解は、

$$x = (C_1 + C_2 t)e^{-\alpha t} \quad (7.20)$$

となる。ここで C_1, C_2 は任意定数である。

[2] 解の性質

解の性質を考察しやすいよう、 $t = 0$ で $x = A$, $\dot{x} = 0$ なる初期条件を適用すると、

$$C_1 = A, \quad C_2 = \alpha A,$$

と定まる。よって、この初期条件を満足する解は、

$$x = A(1 + \alpha t)e^{-\alpha t} \quad (7.21)$$

である。

この解の時間依存性は、図 7.3 の点線のようになる。過減衰と同様、常に $\dot{x} < 0$ であるから、単調減少で、振動することはない。又、 $t \rightarrow \infty$ で $x \rightarrow 0$ であるが、**過減衰の場合より速やかに 0 に近づく**。このような運動を**臨界減衰**と呼ぶ。

問題

7.2 減衰振動の運動方程式 (7.11) について、

- (i) $\omega_0 > \alpha$ の場合、
- (ii) $\alpha > \omega_0$ の場合、

(iii) $\alpha = \omega_0$ の場合,
の一般解を求めよ.

7.3 減衰振動の一般解は, A を振幅, δ を初期位相とすると,

$$x = Ae^{-\alpha t} \sin(\omega_d t + \delta) \quad (7.22)$$

なる形に表すことができる. この解を用いて, 変位 x が最大になる時刻は一定の間隔になっていることを示せ.

7.4

[1] 減衰振動の場合の解 (7.15) は, 初期条件 $t = 0$ で $x = A$, $\dot{x} = v_0$ のもとではどのような形になるか.

[2] $\omega_0 \rightarrow \alpha$ の極限では問 [1] で求めた解は, 臨界減衰の場合の解に帰着する. これを示せ.

[3] 過減衰の場合の解 (7.18) は, 問 [1] と同じ初期条件のもとではどのような形になるか.

[4] $\omega_0 \rightarrow \alpha$ の極限では問 [3] で求めた解は, 問 [2] と同様, 臨界減衰の場合の解に帰着する. これを示せ.

※ 極限の公式,

$$\lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{\sin \theta}{\theta} = 1, \quad (7.23)$$

$$\lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{e^\theta - 1}{\theta} = 1, \quad (7.24)$$

を用いる.

7.4 抵抗のない強制振動

質点が復元力の他に, 時間に依存する外力 $mf(t)$ を受ける場合を考える. この場合, 運動方程式 (両辺を m で割った形) は,

$$\ddot{x} = -\omega_0^2 x + f(t) \quad (7.25)$$

となる. 以下, $f(t)$ という表記は, 変数 f が時間 t の関数であることを意味する. $x(t)$ という表記についても同様である.

項 $f(t)$ がいない場合の方程式 (7.4) を **同次方程式** と呼ぶのに対して, 項 $f(t)$ のある (7.25) を **非同次方程式** と呼ぶ. 外力を受ける振動子の運動を強制振動というが, 強制振動の問題は, 数学的には, 非同次方程式としての 2 階常微分方程式の解法に帰着する.

非同次方程式の解法は, 以下の手順に要約される.

手順 1:

同次方程式 (7.4) の一般解 (7.5) を求める.

手順 2:

外力の関数形から特解の関数形を仮定することで, 非同次方程式 (7.25) の特解 $x_p(t)$ を求める.

手順 3: 同次方程式の一般解 (7.5) と非同次方程式の特解 $x_p(t)$ の和

$$x(t) = C_1 \cos \omega_0 t + C_2 \sin \omega_0 t + x_p(t) \quad (7.26)$$

を, 非同次方程式の一般解とする.

ここでは, 初期条件を適用しやすいよう, cosine 関数のみにまとめた形 (7.6) ではなく, (7.5) の形を用いることにする. 任意定数 C_1, C_2 の値は初期条件により決まる.

以下では, 外力が周期関数の場合について, 非同次方程式の一般解, 更に, 与えられた初期条件を満足する解を求め, 抵抗のない強制振動の解の性質について考察する.

7.4.1 cosine 型の外力における強制振動

7.4.1.1 運動方程式

外力 $f(t)$ の形として、角振動数 ω (ただし $\omega \neq \omega_0$) の周期関数、

$$f(t) = f_0 \cos \omega t \quad (7.27)$$

を考える。ここで、 f_0 は定数とする。この場合、運動方程式は、

$$\ddot{x} = -\omega_0^2 x + f_0 \cos \omega t \quad (7.28)$$

となる。

7.4.1.2 非同次方程式の解法

外力が cosine 関数であることから、(7.28) の特解として、cosine 関数の形、即ち、

$$x = A \cos \omega t \quad (7.29)$$

なる形を仮定することができる。ここで A は未知の定数である。(7.29) を (7.28) に代入し、整理すると、

$$[(\omega_0^2 - \omega^2)A - f_0] \cos \omega t = 0$$

に帰着する。ここで、 $\cos \omega t$ は 0 とは限らないから、

$$(\omega_0^2 - \omega^2)A = f_0,$$

となる。 $\omega \neq \omega_0$ の場合、これを解くと、係数 A が、

$$A = \frac{f_0}{\omega_0^2 - \omega^2},$$

と求まる。従って、非同次方程式 (7.28) の特解は、

$$x = \frac{f_0}{\omega_0^2 - \omega^2} \cos \omega t \quad (7.30)$$

と求まる。

一般解は、

$$x = C_1 \cos \omega_0 t + C_2 \sin \omega_0 t + \frac{f_0}{\omega_0^2 - \omega^2} \cos \omega t \quad (7.31)$$

と書ける。

7.4.1.3 初期条件を満足する解

(7.31) を微分し、速度を求めると、

$$\dot{x} = \omega_0(-C_1 \sin \omega_0 t + C_2 \cos \omega_0 t) - \frac{\omega f_0}{\omega_0^2 - \omega^2} \sin \omega t \quad (7.32)$$

となる。 $t = 0$ で $x = \dot{x} = 0$ なる初期条件を適用する。この場合、(7.31), (7.32) は、

$$C_1 + \frac{f_0}{\omega_0^2 - \omega^2} = 0,$$

$$\omega_0 C_2 = 0,$$

となる。これより、任意定数 C_1, C_2 が定まり、与えられた初期条件を満足する解が、

$$x = \frac{f_0}{\omega_0^2 - \omega^2} (\cos \omega t - \cos \omega_0 t) \quad (7.33)$$

と求まる.

問題

7.5 質点が、変位に比例した復元力と sine 関数で表される周期的な外力を受けて、 x 軸上を運動している。
この場合、運動方程式は、

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = f_0 \sin \omega t \quad (7.34)$$

である。この運動方程式について、

[1] 一般解を求めよ。

[2] $t = 0$ で $x = 0, \dot{x} = -\frac{f_0}{\omega_0 + \omega}$ なる初期条件を満足する解を求めよ。

7.4.2 周期的な強制振動の例

図 7.4 に 1 例として、外力の角振動数を $\omega = 0.6\omega_0$ とした場合について、変位 x の時間依存性を示す。この例のように、外力の角振動数 ω が固有角振動数 ω_0 から離れている場合は、単に、角振動数 ω_0 の単振動と角振動数 ω の単振動の重ね合わせとなる。特に目立った特徴はない。

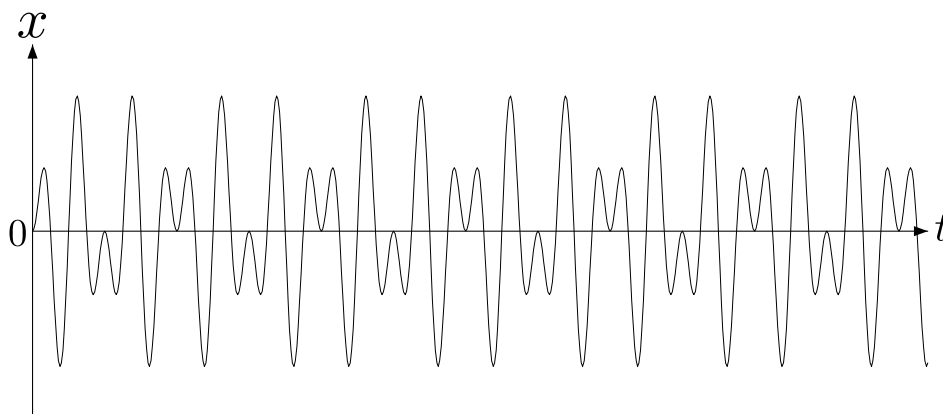


図 7.4. cosine 型の外力を受けた強制振動（抵抗のない場合）の変位の時間依存性。外力の角振動数は $\omega = 0.6\omega_0$ とした場合。

7.4.3 周期的な強制振動における特徴的な現象 — 共鳴・うなり

外力の角振動数を

$$\omega = \omega_0 + \varepsilon$$

のように、定数 ε を用いて、固有角振動数 ω_0 からのずれの形におく。これを (7.33) に代入する。

$$x = -\frac{f_0}{(2\omega_0 + \varepsilon)\varepsilon} [\cos(\omega_0 + \varepsilon)t - \cos \omega_0 t]$$

これを、三角関数の和積の公式を用いて変形する。

$$x = \frac{2f_0}{(2\omega_0 + \varepsilon)\varepsilon} \cdot \sin \left[\left(\omega_0 + \frac{\varepsilon}{2} \right) t \right] \cdot \sin \left(\frac{\varepsilon}{2} t \right) \quad (7.33)'$$

7.4.3.1 共鳴

外力の角振動数 ω が固有角振動数 ω_0 に近づく極限，即ち， $\varepsilon \rightarrow 0$ の極限を考える．

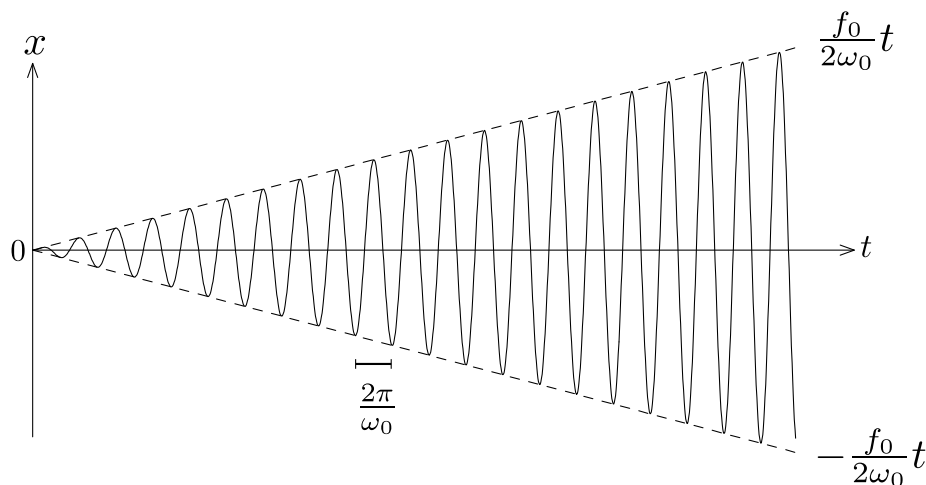


図 7.5. 共鳴の場合の変位の時間依存性.

[1] 解の導出

(7.33)' を，極限の公式 (7.23) を適用しやすい形に変形する．

$$x = \frac{f_0}{2\omega_0 + \varepsilon} \cdot \sin \left[\left(\omega_0 + \frac{\varepsilon}{2} \right) t \right] \cdot \frac{\sin \left(\frac{\varepsilon}{2} t \right)}{\frac{\varepsilon}{2} t} \cdot t$$

ここで，分母は sine 関数の引数 $\frac{\varepsilon}{2} t$ と同じ形とする．その際， t が余るので，分子に掛けておく．
 $\varepsilon \rightarrow 0$ の極限をとる．

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} x &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{f_0}{2\omega_0 + \varepsilon} \cdot \sin \left[\left(\omega_0 + \frac{\varepsilon}{2} \right) t \right] \cdot \frac{\sin \left(\frac{\varepsilon}{2} t \right)}{\frac{\varepsilon}{2} t} \cdot t \\ \therefore \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} x &= \frac{f_0}{2\omega_0} t \sin \omega_0 t \end{aligned} \quad (7.35)$$

[2] 解の特徴

(7.35) 式から予想されるように，これは，固有周期 $T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0}$ で振動を繰り返しながら，振幅は時間に比例して，即ち， $\frac{f_0}{2\omega_0} t$ に従って，増大する解となっている．これは共鳴（共振）と呼ばれる．

共鳴の場合の変位の時間依存性を，図 7.5 に実線で示す．図の点線は，変位の包絡線 $x = \pm \frac{f_0}{2\omega_0} t$ である．

7.4.3.2 うなり

外力の角振動数 ω が固有角振動数 ω_0 に近い場合，即ち， $\varepsilon \sim 0$ の場合を考える．

[1] 解の導出

$\varepsilon \sim 0$ の場合，

$$\begin{aligned} 2\omega_0 + \varepsilon &\sim 2\omega_0, \\ \sin \left[\left(\omega_0 + \frac{\varepsilon}{2} \right) t \right] &\sim \sin \omega_0 t \end{aligned}$$

と近似できる。この場合、(7.33)' は、

$$x = \frac{f_0}{\omega_0 \varepsilon} \cdot \sin(\omega_0 t) \cdot \sin\left(\frac{\varepsilon}{2} t\right) \quad (7.36)$$

と近似される。

※ 記号 $\sim$ は近似値であることを意味する。 $\simeq$ とも書く。

※ 近似の指針

(大きい量) $\pm$ (小さい量) $\sim$ (大きい量)

(大きい量) $-$ (大きい量) 又は (小さい量) $\pm$ (小さい量) : 近似不可。そのまま残す。

[2] 解の特徴

(7.36) から予想されるように、固有周期 $T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0}$ で振動を繰り返しながら、振幅 $|\sin(\frac{\varepsilon}{2}t)|$ は、固有周期よりはるかに長い周期 $\frac{2\pi}{|\varepsilon|}$ で増減を繰り返すという解となっている。これはうなりと呼ばれる。

うなりの場合の変位の時間依存性を、図 7.6 に実線で示す。図の点線は、変位の包絡線 $x = \left| \frac{f_0}{\omega_0 \varepsilon} \sin\left(\frac{\varepsilon}{2}t\right) \right|$ である。

$x = \frac{f_0}{\omega_0 \varepsilon} \sin\left(\frac{\varepsilon}{2}t\right)$ の周期は $\frac{4\pi}{|\varepsilon|}$ であるが、これに絶対値を付けたものの周期はこの 1/2 の $\frac{2\pi}{|\varepsilon|}$ である。こちらをうなりの周期とみなす。

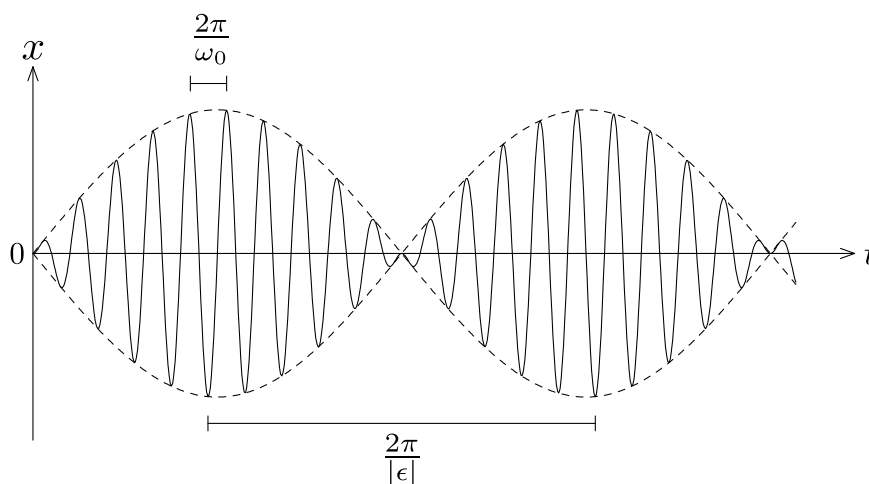


図 7.6. うなりの場合の変位の時間依存性.

問題

7.6 問題 7.5 で求めた解について、

[1] $\omega \rightarrow \omega_0$ の極限をとることで、共鳴の解を求めよ。

[2] $\omega \sim \omega_0$ の近似をすることで、うなりの解を求めよ。

7.5 抵抗のある強制振動

質点が復元力、抵抗力の他に、時間に依存する外力 $mf(t)$ を受ける場合を考える。この場合、運動方程式（両辺を m で割った形）は、

$$\ddot{x} = -\omega_0^2 x - 2\alpha\dot{x} + f(t) \quad (7.37)$$

となる。

第 7.3 節で説明したように、抵抗のある場合、減衰定数 α の大きさに応じて運動の様子は大きく異なる。この中で力学として興味深いのは、振動の起こる $\omega_0 > \alpha$ の場合である。従って、本小節ではこの場合に話を限定する。この場合、同次方程式 (7.11) の一般解は (7.15) であった。

7.5.1 過渡現象と定常解

(7.37) の一般解は、同次方程式 (7.11) の一般解 (7.15) と、非同次方程式 (7.37) の特解 $x_p(t)$ との重ね合わせで、

$$x(t) = e^{-\alpha t}(C_1 \cos \omega_d t + C_2 \sin \omega_d t) + x_p(t) \quad (7.38)$$

と表される。 $(\alpha > \omega_0$ 又は $\omega_0 = \alpha$ の場合には、同次方程式の一般解の部分に、それに応じた一般解 ((7.18) か (7.20)) を用いれば良い.)

十分時間が経った後 ($t \gg \alpha^{-1}$) には、 $e^{-\alpha t} \rightarrow 0$ となるので、(7.38) の右辺第 1 項の部分は減衰してしまい、特解 $x_p(t)$ の項が運動を決める。この後期の期間の解、

$$x(t) \sim x_p(t) \quad (t \gg \alpha^{-1}), \quad (7.39)$$

を**定常解（定常振動）**と呼ぶ。

これに対して、初期の期間 ($t \ll \alpha^{-1}$) では、第 1 項の部分からの寄与も無視できない。時間と共にその振幅が減少する第 1 項の影響を、**過渡現象**という。

※ 第 7.4 節で説明した抵抗がない ($\alpha = 0$) 場合は、第 1 項の部分が減衰することはない、過渡現象は存在しない。

7.5.2 cosine 型の外力における強制・減衰振動

抵抗がない場合と同様、(7.27) 式で表される、角振動数 ω の周期関数の外力を考える。抵抗が作用する場合、運動方程式は、

$$\ddot{x} = -\omega_0^2 x - 2\alpha\dot{x} + f_0 \cos \omega t \quad (7.40)$$

となる。

7.5.2.1 非同次方程式の特解

非同次方程式 (7.40) の特解として、

$$x = A \cos \omega t + B \sin \omega t \quad (7.41)$$

なる形を仮定する．(7.41) を (7.40) に代入し，整理すると，

$$[(\omega_0^2 - \omega^2)A + 2\alpha\omega B - f_0] \cos \omega t + [-2\alpha\omega A + (\omega_0^2 - \omega^2)B] \sin \omega t = 0$$

に帰着する． $\cos \omega t$, $\sin \omega t$ は 1 次独立であるから，これが任意の実数 t に対して成り立つためには，

$$(\omega_0^2 - \omega^2)A + 2\alpha\omega B - f_0 = 0,$$

$$-2\alpha\omega A + (\omega_0^2 - \omega^2)B = 0,$$

が成り立たなければならない．これを解くと，係数 A , B が，

$$A = \frac{f_0(\omega_0^2 - \omega^2)}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\alpha^2\omega^2}, \quad B = \frac{2f_0\alpha\omega}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\alpha^2\omega^2}$$

と求まる．従って，非同次方程式 (7.40) の特解は，

$$x = \frac{f_0(\omega_0^2 - \omega^2)}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\alpha^2\omega^2} \cos \omega t + \frac{2f_0\alpha\omega}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\alpha^2\omega^2} \sin \omega t \quad (7.42)$$

と求まる．

7.5.2.2 特解の性質

特解 (7.42) を cosine 関数のみを用いて，

$$x = R \cos(\omega t - \phi) \quad (7.43)$$

なる形に書き換える (sine 関数のみを用いてもよい)．なお，(7.5) を (7.6) に書き換えた時とは異なり， ϕ の前に負号を付けたのは， ϕ を外力 (7.27) に対する位相の遅れと解釈するためである． R は，(7.6) と同様，振幅を表す．

$$R \cos \phi = A = \frac{f_0(\omega_0^2 - \omega^2)}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\alpha^2\omega^2}, \quad (7.44a)$$

$$R \sin \phi = B = \frac{2f_0\alpha\omega}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\alpha^2\omega^2}, \quad (7.44b)$$

であるから， R , ϕ の表式は以下で与えられる．

$$R = \frac{f_0}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\alpha^2\omega^2}}, \quad (7.45a)$$

$$\phi = \tan^{-1} \left(\frac{2\alpha\omega}{\omega_0^2 - \omega^2} \right). \quad (7.45b)$$

振幅 R , 位相差 ϕ は，外力の角振動数 ω の関数と見なされる．

[1] 振幅 R の，外力の角振動数 ω に対する依存性

振幅 R の，外力の角振動数 ω 依存性は，図 7.7 のようになる．振幅は，ある角振動数 ω_R で極大点を持ち，極大点から離れるに従い，速やかに減少する．この極大点の角振動数は，

$$\omega_R = \sqrt{\omega_0^2 - 2\alpha^2} \quad (7.46)$$

で与えられる。これは、抵抗がある場合に、共鳴を起こす角振動数を与える。抵抗がある場合の共鳴点は、抵抗が無い場合の共鳴点 ω_0 より、低い角振動数となる。図 7.7 を共鳴曲線と呼ぶ。

共鳴点 $\omega = \omega_R$ での振幅は、

$$R_{\max} = \frac{f_0}{2\alpha\sqrt{\omega_0^2 - \alpha^2}} = \frac{f_0}{2\alpha\omega_d} \quad (7.47)$$

となる。振幅の最大値は、減衰定数 α が小さい程、大きくなる。

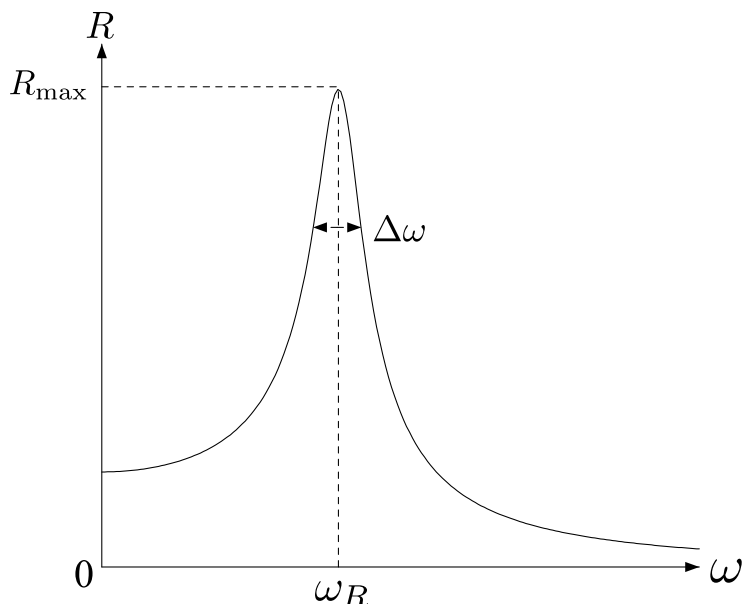


図 7.7. 共鳴曲線。

振幅が最大値 $R_{\max}$ の $1/\sqrt{2}$ となる振幅をとる 2 点の角振動数をそれぞれ ω_- , ω_+ とすると、

$$\omega_+^2 - \omega_-^2 = 4\omega_d\alpha$$

と求まる（導出は問題 7.9）。ここで、共鳴曲線の幅を、 $\Delta\omega = \omega_+ - \omega_-$ で定義する。特に、抵抗による減衰が十分小さい場合、 ω_0 と比べて α は十分小さい。この時、共鳴曲線の幅は、

$$\Delta\omega \sim 2\alpha \quad (7.48)$$

と近似することができる。減衰定数 α が小さい程、共鳴曲線の幅は狭くなる（共鳴曲線はシャープになる）。

※ なお、 $\omega_0 \leq \sqrt{2}\alpha$ の場合は、振幅が極大となる ω は存在せず、共鳴は起こらない。

[2] 共鳴曲線の減衰定数 α 依存性

図 7.8(a) に、 α が異なる 4 つの場合 ($\alpha/\omega_0 = 1, 0.3, 0.1, 0$ の 4 つの場合) について、共鳴曲線を示す。(7.48) 式から期待されるように、 α が小さくなるに従い、共鳴曲線の幅が狭くなる。又、(7.47) 式から期待されるように、 α が小さくなるに従い、共鳴点での振幅が増大する。更に、共鳴点の角振動数は、 α が小さくなるに従い、 ω_0 に近づく。特に、 $\alpha/\omega_0 = 1$ の場合、共鳴点は存在しない。抵抗のない場合 ($\alpha/\omega_0 = 0$ の場合)、共鳴点で振幅は発散するが、抵抗のある場合は有限値に留まる。

[3] 位相差 ϕ の、外力の角振動数 ω に対する依存性

図 7.9 に、固有角振動数 ω_0 と比べて、外力の角振動数 ω が、かなり小さい場合、等しい場合かなり大きい場合の 3 ケースについて、定常解の時間依存性を実線で示す。同図には、位相差 ϕ を見るために、外力の時間依存性を点線で示した。 ω がかなり小さい場合 (図 (a) $\omega = 0.6\omega_0$ の場合)、位相差はごくわずか ($\phi = 2^\circ$) で、定常解は外力とほぼ同じ位相で振動する。 $\omega = \omega_0$ で、共鳴点に近い場合 (図 (b))、外力に対して 90° 遅れて振動する。 ω がかなり大きい場合 (図 (c) $\omega = 1.4\omega_0$ の場合)、定常解は外力に対してほぼ 180° 遅れて ($\phi = 177^\circ$) 振動する。

図 7.8(b) に、 α が異なる 4 つの場合 ($\alpha/\omega_0 = 1, 0.3, 0.1, 0$ の 4 つの場合) について、位相差 ϕ の ω 依存性を示す。 α が小さくなるに従い、位相差 ϕ の $\omega = \omega_0$ 付近での変化が急峻となる。特に、抵抗のない場合は、 $\omega < \omega_0$ で $\phi = 0^\circ$, $\omega = \omega_0$ で $\phi = 90^\circ$, $\omega > \omega_0$ で $\phi = 180^\circ$ となり、位相差は $\omega = \omega_0$ で不連続的

に変化する。

固有角振動数と比べて、外力の角振動数がかなり小さい場合、振動子の運動は外力の変化によく追従することができるため、位相差はほぼ 0° である。一方、外力の角振動数がかなり大きい場合、振動子の運動は外力についていくのが困難となり、位相差はほぼ 180° となる。

問題

7.7 質点が、変位に比例した復元力、速度に比例した抵抗力、sine 関数で表される周期的な外力を受けて、 x 軸上を運動している。この場合、運動方程式は、

$$\ddot{x} + 2\alpha\dot{x} + \omega_0^2 x = f_0 \sin \omega t \quad (7.49)$$

となる。この運動方程式の特解を求めよ。更に、振幅と位相差の表式を求めよ。

7.8 ω を変化させた時、振幅 R が最大となる場合の ω (即ち、共鳴を与える角振動数 ω) が (7.46) となることを求めよ。更に、その時の振幅が (7.47) となることを求めよ。

7.9 周期的な外力を受けた強制・減衰振動子の Q 値 (quality factor) は、

$$Q = \frac{\omega_R}{2\alpha} \quad (7.50)$$

で定義される。減衰が小さい (α が小さい) 場合、 Q 値は、

$$Q \sim \frac{\omega_0}{\Delta\omega} \quad (7.51)$$

で近似される。ここで、 $\Delta\omega$ は、共鳴点 $\omega = \omega_R$ での振幅 $R_{\max}$ の $\frac{1}{\sqrt{2}}$ となる振幅を与える 2 点間の共鳴曲線の幅で、 ω_R は (7.46) 式、 $R_{\max}$ は (7.47) 式で与えられる。

[1] 共鳴曲線の幅 $\Delta\omega$ は、 α が小さい場合、(7.48) 式で近似される。これを示せ。

[2] 問 [1] の結果を用いると、 α が小さい場合、 Q 値 (7.50) は (7.51) 式で近似される。これを示せ。

7.5.3 cosine 型の外力における過渡現象と定常振動

7.5.3.1 一般解

非同次方程式 (7.40) の一般解は、 $\omega_0 > \alpha$ の場合、同次方程式の一般解 (7.15) と非同次方程式の特解 (7.43) で表され、

$$x = e^{-\alpha t} (C_1 \cos \omega_d t + C_2 \sin \omega_d t) + R \cos(\omega t - \phi) \quad (7.52)$$

となる。

7.5.3.2 抵抗がある場合の共鳴・うなり

抵抗が無い場合に考察した、特徴的な運動である共鳴やうなりは、抵抗がある場合には、過渡現象においてその特徴が現れる。

図 7.10 に、 $t = 0$ で $x = \dot{x} = 0$ なる初期条件の場合について、変位 x の時間依存性を示す。ここでは、減衰定数は $\alpha = 0.01\omega_0$ に固定し、外力の角振動数 ω が異なる 3 つのケース ((a) $\omega = 0.6\omega_0$, (b) $\omega = 0.9\omega_0$, (c) $\omega = \omega_0$) について示す。

いずれのケースでも、時間が十分経過した後 ($t \gg \alpha^{-1}$) には、過渡現象は減衰してしまい、振動子は定常的な振動をする。これは、外力により系に供給されるエネルギーが、抵抗により散逸されるエネルギーと

バランスするためである。定常状態での振動の周期は外力のそれと同じ $\frac{2\pi}{\omega}$ である。又、図 7.7 で考察したように、定常状態での振幅は、ほぼ共鳴点の (c) $\omega = \omega_0$ の場合が最も大きく、 ω がそれから離れるに従い、図 (b), (a) の順に小さくなる。

一方、過渡現象の存在する初期 ($t \ll \alpha^{-1}$) の振動の様子も ω の違いにより、かなり異なる。これらの特徴は以下のようにまとめられる。

(i) ほぼ共鳴点の (c) $\omega = \omega_0$ の場合

振幅は初期には単調に増大する（ごく初期には、抵抗がない場合と同様、時間に比例して増大する）。しかし、やがて抵抗が効いてきて、振幅は一定値（定常解）に達する。

(ii) 共鳴点からやや離れた (b) $\omega = 0.9\omega_0$ の場合

初期にうなりを 3 回だけ起こした後、うなりは消失し、振動は定常的になる。抵抗がない場合の様にうなりが継続して起こることはなく、時間の経過と共に、うなりの包絡線の振幅は小さくなる。なお、初期に見られるうなりの回数は、 α の値を更に小さく選べば、増加する。

(iii) 共鳴点から大きく離れた (a) $\omega = 0.6\omega_0$ の場合

初期に特徴的な現象は見られない。又、定常状態での振幅も小さい。

7.6 振動子のエネルギー論

7.6.1 単振動のエネルギー

単振動の運動方程式 (7.4) の両辺に $m\dot{x}$ を掛け、変形する。その結果、全エネルギー方程式が以下のよう
に得られる。

$$\begin{aligned} m\dot{x}\ddot{x} &= -m\omega_0^2 x\dot{x} \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} m\dot{x}^2 \right) &= -\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} m\omega_0^2 x^2 \right) \\ \therefore \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} m\dot{x}^2 + \frac{1}{2} m\omega_0^2 x^2 \right) &= 0 \end{aligned}$$

この式は、運動エネルギー

$$K = \frac{1}{2} m\dot{x}^2 \quad (7.53)$$

と、ポテンシャルエネルギー ($x = 0$ で $U = 0$ となるように積分定数を決めた)

$$U = \frac{1}{2} m\omega_0^2 x^2 \quad (7.54)$$

の和で定義される全エネルギー

$$E = \frac{1}{2} m\dot{x}^2 + \frac{1}{2} m\omega_0^2 x^2 \quad (7.55)$$

が保存することを示す。

問題

7.10 単振動の解 (7.6) に対して、全エネルギーを求めよ。(m, ω_0, A を用いて表すこと.)

7.11 単振動の解 (7.6) に対して、

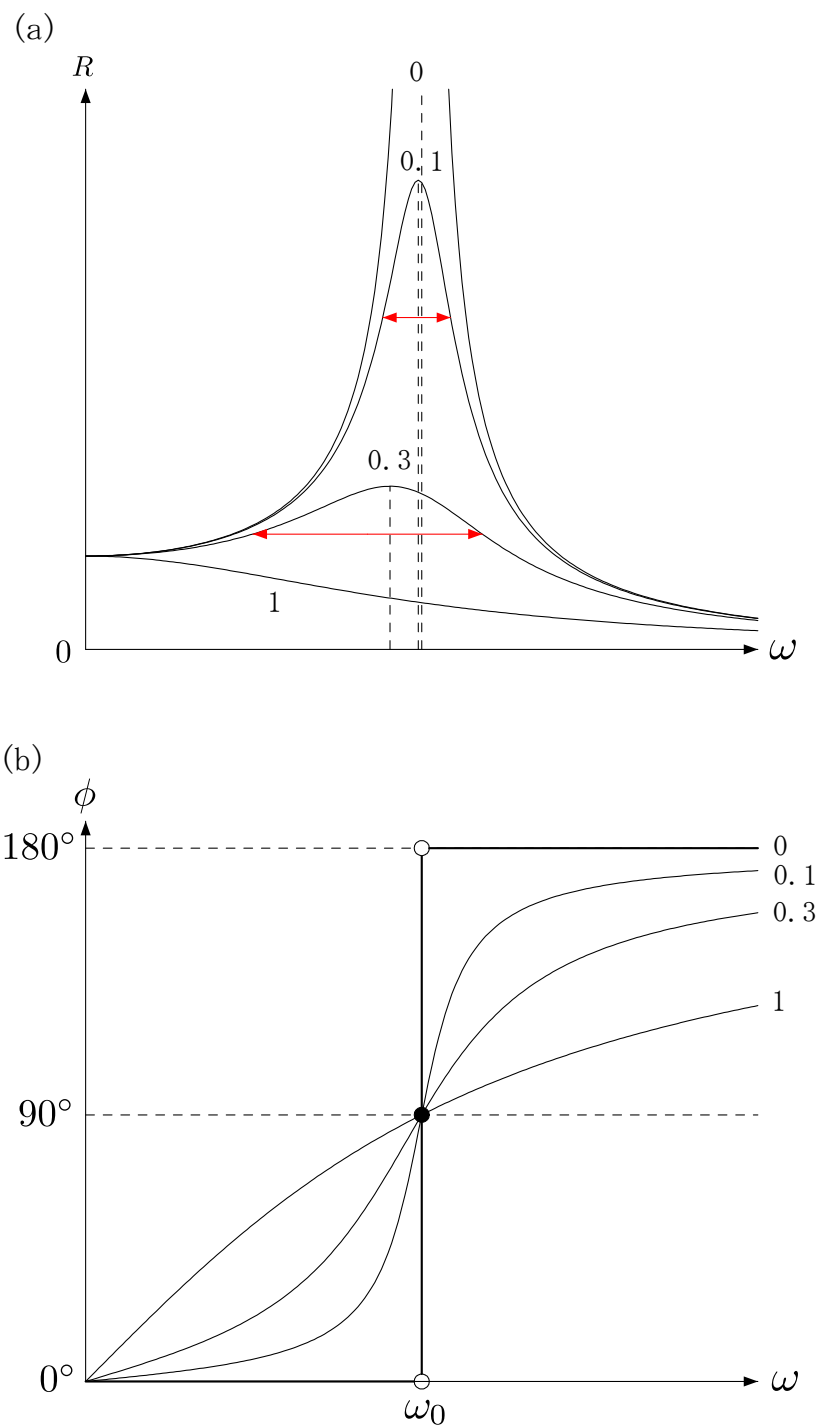


図 7.8. cosine 型の外力による強制振動子の、(a) 振幅 R 、及び、(b) 位相差 ϕ の、外力の角振動数 ω 依存性 ((7.45) 式参照)．減衰定数は、 $\alpha/\omega_0 = 0, 0.1, 0.3, 1$ の場合 ($\alpha/\omega_0 = 1$ 以外は、共鳴点が存在する条件 $\omega_0 > \sqrt{2}\alpha$ を満足する．共鳴点を図 (a) に縦の点線で示す.)． $\alpha/\omega_0 = 0.1, 0.3$ の場合について、共鳴曲線の幅を赤線で図 (a) に示す． Q 値はそれぞれ 4.95, 1.51 となる．

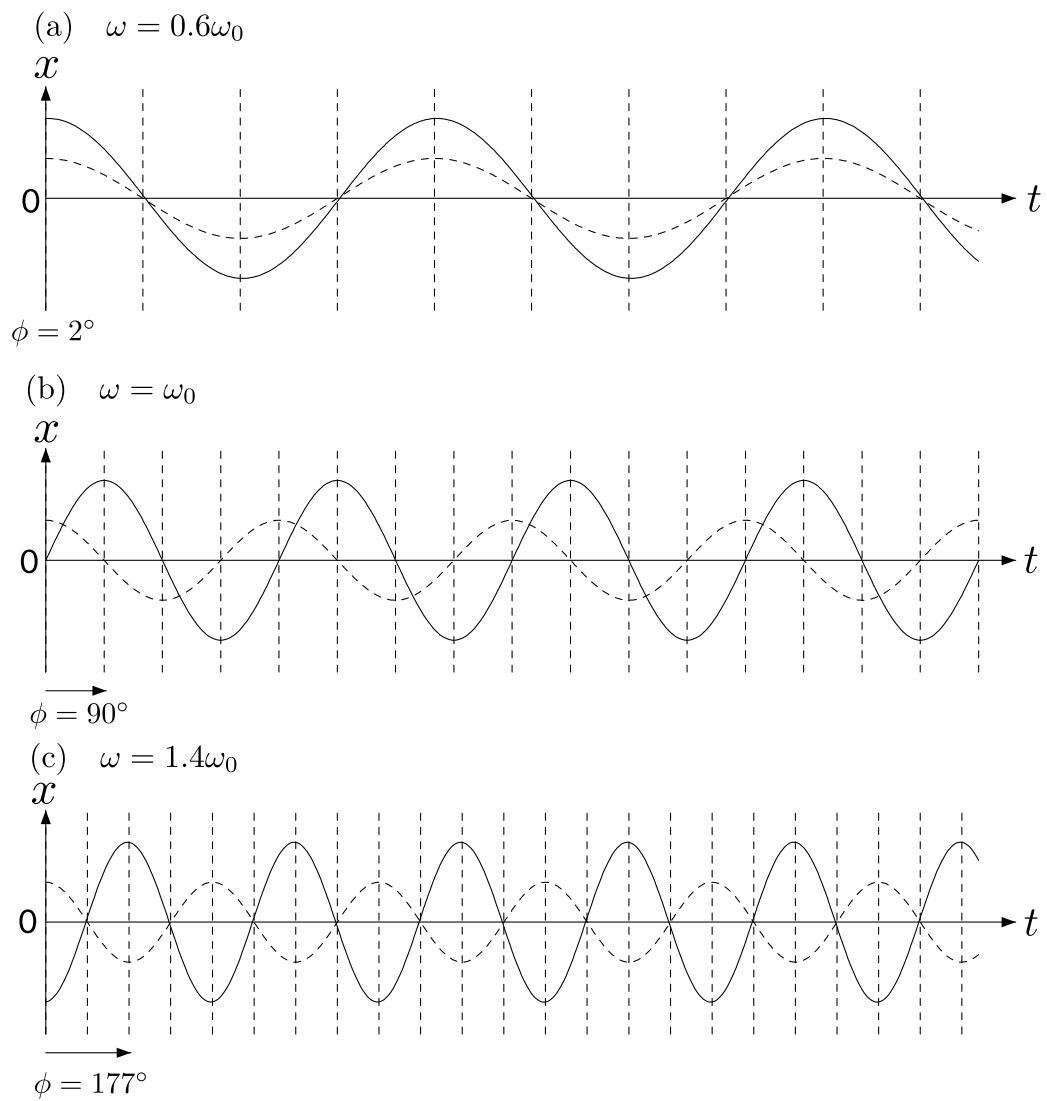


図 7.9. $\cos$ 型の外力（点線）と，それに対する定常解の変位（実線）の時間依存性．外力の角振動数 ω は，(a) $0.6\omega_0$, (b) ω_0 , (c) $1.4\omega_0$. 減衰定数は $\alpha = 0.02\omega_0$ とした．図下部の矢印は，外力に対する変位の位相の遅れ ϕ を示す．

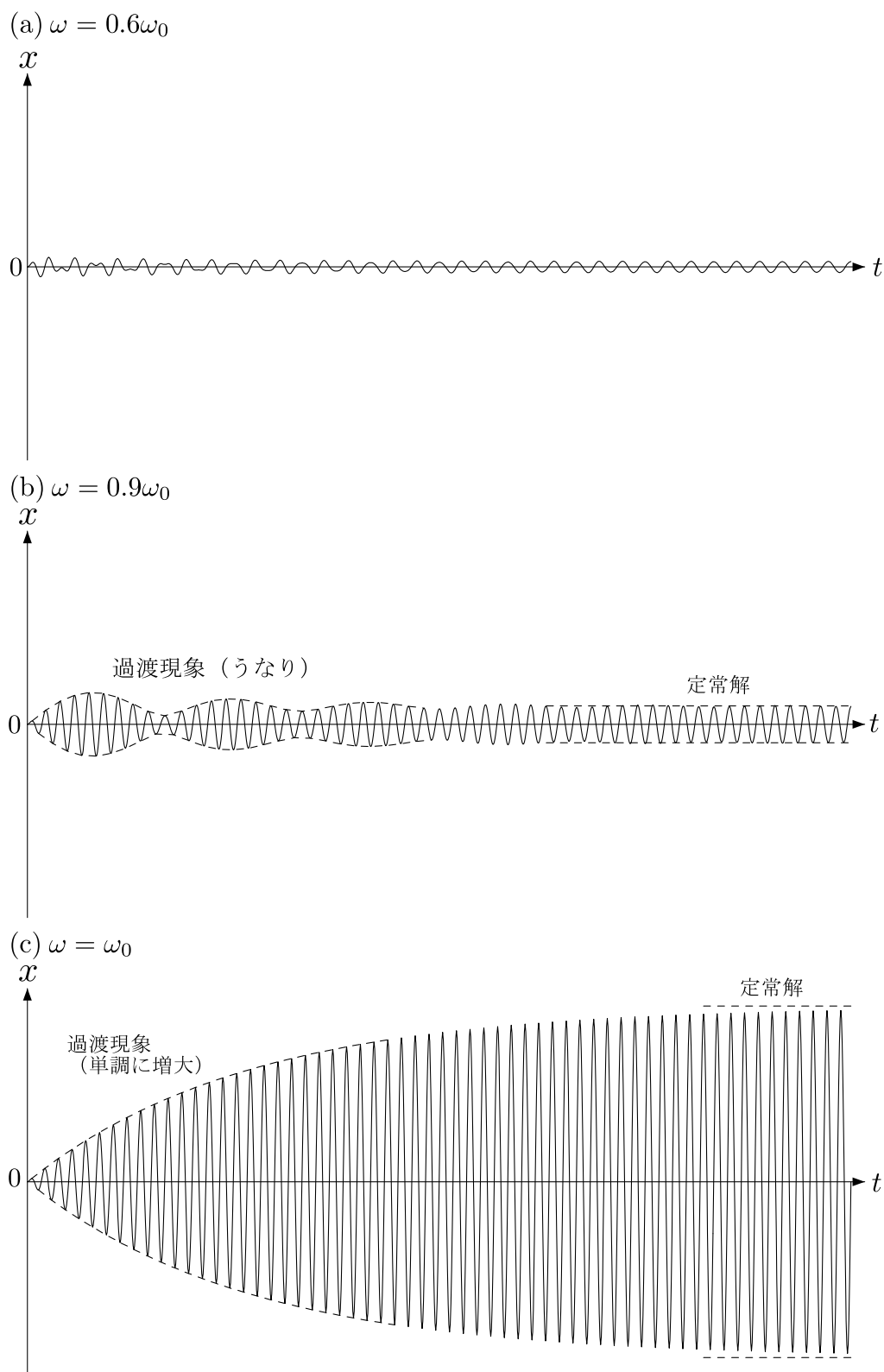


図 7.10. cosine 型の外力を受けた強制振動子の変位の時間依存性. 抵抗のある場合. 外力の角振動数 ω は, (a) $0.6\omega_0$, (b) $0.9\omega_0$, (c) ω_0 . 過渡現象が存在する初期には, ほぼ共鳴点の $\omega = \omega_0$ の場合, 単調な振幅の増大が見られる. 共鳴点からやや離れた $\omega = 0.9\omega_0$ の場合, 初期に 3 回だけうなりが見られる. 共鳴点から大きく離れた $\omega = 0.6\omega_0$ の場合, 過渡現象に特徴はない. 定常解に達する後期では, ω が共鳴点に近い場合ほど, 振動の振幅が大きい.

(i) 運動エネルギー K の 1 周期についての平均値,

$$\bar{K} = \frac{1}{T_0} \int_0^{T_0} K dt. \quad (7.56)$$

(ii) ポテンシャルエネルギー U の 1 周期についての平均値,

$$\bar{U} = \frac{1}{T_0} \int_0^{T_0} U dt. \quad (7.57)$$

を計算し, $\bar{K} = \bar{U}$ となることを確かめよ. 最終的な結果は, m, ω_0, A のみを用いて表すこと.

7.12 単振動の全エネルギー (7.55) に対して, 第 5.1.6 節の例題 5.4 や問題 5.5 と同様の手法を用いて, 単振動の一般解 (7.6) 式を導出せよ. ただし, 簡単のため, $\dot{x} > 0$ と仮定する.

7.6.2 減衰振動子のエネルギー

減衰振動子の運動方程式 (7.11) の両辺に $m\dot{x}$ を掛けると, エネルギー方程式,

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} m \dot{x}^2 + \frac{1}{2} m \omega_0^2 x^2 \right) = -2m\alpha \dot{x}^2 \quad (7.58)$$

が得られる. 右辺の項は, 抵抗により単位時間あたりに失われるエネルギー (抵抗によるエネルギー散逸率と呼ぶ) を表す. 右辺の符号は, 負値確定である. 従って, 全エネルギーは単調に減少する.

問題

7.13 減衰振動の起こる $\omega_0 > \alpha$ の場合を考える. $t = 0$ で $x = A, \dot{x} = 0$ なる初期条件を満足する運動方程式 (7.11) の解は (7.16) である. この解を用いて, 時刻 $0 \leq t < \infty$ の間に抵抗力がなす仕事を計算し, その大きさが初期の全エネルギーに等しいことを示せ.

7.6.3 強制・減衰振動子のエネルギー

強制・減衰振動子の運動方程式 (7.37) の両辺に $m\dot{x}$ を掛けると, 全エネルギー方程式,

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} m \dot{x}^2 + \frac{1}{2} m \omega_0^2 x^2 \right) = -2m\alpha \dot{x}^2 + m f(t) \dot{x} \quad (7.59)$$

が得られる. 右辺第 1 項は, 抵抗により単位時間あたりに失われるエネルギー (以下, 抵抗によるエネルギー散逸率と呼ぶ) を, 右辺第 2 項は, 外力により単位時間あたりに与えられるエネルギー (以下, 外力によるエネルギー供給率と呼ぶ) を表す.

問題

7.14 周期的な外力 (7.27) を受ける強制・減衰振動子について, 過渡現象が消失した以後の期間を対象として, 以下の問いに答えよ. 計算には定常解 (7.43) を用いること.

[1] 抵抗によるエネルギー散逸率を, 外力の周期 $T_f = \frac{2\pi}{\omega}$ について一周期平均した値,

$$\bar{Q}_d = -\frac{1}{T_f} \int_0^{T_f} 2m\alpha \dot{x}^2 dt, \quad (7.60)$$

を求めよ. (m, α, ω, R のみを用いて表すこと.)

[2] 外力によるエネルギー供給率を，外力の周期 $T_f = \frac{2\pi}{\omega}$ について一周期平均した値，

$$\bar{Q}_f = \frac{1}{T_f} \int_0^{T_f} (m f_0 \dot{x} \cos \omega t) dt, \quad (7.61)$$

を求めよ. (m, f_0, ω, R, ϕ のみを用いて表すこと.)

[3] (7.44a), (7.44b) あるいは (7.45a) を用いると, $-\bar{Q}_d = \bar{Q}_f$ となる. これを示せ.

※ 過渡現象が消失した以後の期間では, 一周期あたり, 外力により供給されるエネルギーと, 抵抗により散逸されるエネルギーがつりあうため, 定常的な振動をする. 即ち, 振幅の増減は起こらない.

[4] 問 [3] で求めた「外力によるエネルギー供給率」又は「抵抗によるエネルギー散逸率」を最大にする, 外力の角振動数 ω を求めよ.