

1.3 2次元極座標系

問題 1.3

[1] $x = r_0 \cos \theta$ を時間微分し, v_0 と等しいとおく.

$$v_0 = \dot{x} = r_0 \frac{d}{dt}(\cos \theta) = r_0 \frac{d}{d\theta}(\cos \theta) \dot{\theta} = -r_0 \dot{\theta} \sin \theta$$

これより,

$$\dot{\theta} = -\frac{v_0}{r_0 \sin \theta} \quad (\text{A1.1})$$

が得られる.

[2] 極座標系の基本ベクトル $\mathbf{e}_r, \mathbf{e}_\theta$ について, その時間微分が,

$$\dot{\mathbf{e}}_r = \dot{\theta} \mathbf{e}_\theta, \quad (1.12a)$$

$$\dot{\mathbf{e}}_\theta = -\dot{\theta} \mathbf{e}_r, \quad (1.12b)$$

となることは既知 (導出済み) とする.

位置ベクトルは

$$\mathbf{r} = r_0 \mathbf{e}_r \quad (\text{A1.2})$$

と表される. ここで円周上の運動のため, r_0 は定数である.

r_0 が定数であることに留意して, (A1.2) を時間微分し, 速度ベクトル $\mathbf{v}$ を求める.

$$\mathbf{v} = \dot{\mathbf{r}} = r_0 \dot{\mathbf{e}}_r$$

ここで (1.12a) より,

$$\mathbf{v} = r_0 \dot{\theta} \mathbf{e}_\theta$$

となる. 円周上の運動の場合, 速度の動径成分 (即ち, 円に垂直な成分) は 0 で, 角成分 (即ち, 円に接する成分) のみ値を持つ. これに問 [1] の結果,

$$\dot{\theta} = -\frac{v_0}{r_0 \sin \theta} \quad (\text{A1.1})$$

を代入する.

$$\mathbf{v} = -\frac{v_0}{\sin \theta} \mathbf{e}_\theta \quad (\text{A1.3})$$

v_0 が定数であることに留意して, (A1.3) を時間微分し, 加速度ベクトル $\mathbf{a}$ を求める.

$$\mathbf{a} = \dot{\mathbf{v}} = -\frac{d}{dt} \left(\frac{v_0}{\sin \theta} \right) \mathbf{e}_\theta - \frac{v_0}{\sin \theta} \dot{\mathbf{e}}_\theta$$

ここで, 合成関数の微分を考慮すると,

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{v_0}{\sin \theta} \right) = \frac{d}{d\theta} \left(\frac{v_0}{\sin \theta} \right) \dot{\theta} = -\frac{v_0 \cos \theta}{\sin^2 \theta} \dot{\theta}$$

である。更に (A1.1) を代入すると,

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{v_0}{\sin \theta} \right) = \frac{v_0^2 \cos \theta}{r_0 \sin^3 \theta}$$

となる。これと (1.12b) より, 加速度ベクトルは,

$$\mathbf{a} = -\frac{v_0^2 \cos \theta}{r_0 \sin^3 \theta} \mathbf{e}_\theta + \frac{v_0}{\sin \theta} \dot{\theta} \mathbf{e}_r$$

となる。右辺第 2 項に (A1.1) を代入すると,

$$\mathbf{a} = -\frac{v_0^2 \cos \theta}{r_0 \sin^3 \theta} \mathbf{e}_\theta - \frac{v_0^2}{r_0 \sin^2 \theta} \mathbf{e}_r \quad (\text{A1.4})$$

と表される。加速度の動径成分 a_r , 角成分 a_θ は, それぞれ,

$$a_r = -\frac{v_0^2}{r_0 \sin^2 \theta},$$

$$a_\theta = -\frac{v_0^2 \cos \theta}{r_0 \sin^3 \theta},$$

である。

問題 1.4

$$\mathbf{A} = A_r \mathbf{e}_r + A_\theta \mathbf{e}_\theta \quad (\text{1.19})$$

の両辺を微分する。

$$\dot{\mathbf{A}} = \dot{A}_r \mathbf{e}_r + A_r \dot{\mathbf{e}}_r + \dot{A}_\theta \mathbf{e}_\theta + A_\theta \dot{\mathbf{e}}_\theta$$

ここで (1.12) を適用する。

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{A}} &= \dot{A}_r \mathbf{e}_r + A_r \dot{\theta} \mathbf{e}_\theta + \dot{A}_\theta \mathbf{e}_\theta - A_\theta \dot{\theta} \mathbf{e}_r \\ &= (\dot{A}_r - \dot{\theta} A_\theta) \mathbf{e}_r + (\dot{A}_\theta + \dot{\theta} A_r) \mathbf{e}_\theta \end{aligned}$$

従って, $\dot{\mathbf{A}}$ の動径成分は $\dot{A}_r - \dot{\theta} A_\theta$, 角成分は $\dot{A}_\theta + \dot{\theta} A_r$ となる。

問題 1.5

任意の 2 次元ベクトルについて, デカルト座標系に関する成分と極座標系に関する成分の間には, 関係式 (1.17) が成り立つ。これを用いると, 速度のデカルト座標系に関する成分 $(\dot{x}, \dot{y})$ と, 速度の極座標系に関する成分 (v_r, v_θ) (速度の動径成分, 角成分をそれぞれ v_r, v_θ とおいた) の間に, 関係式,

$$v_r = \dot{x} \cos \theta + \dot{y} \sin \theta, \quad (\text{A1.5a})$$

$$v_\theta = -\dot{x} \sin \theta + \dot{y} \cos \theta, \quad (\text{A1.5b})$$

が成り立つ。

$$x = r \cos \theta, \quad (\text{1.7a})$$

$$y = r \sin \theta, \quad (1.7b)$$

を時間微分すると,

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \dot{r} \cos \theta + r \frac{d}{dt}(\cos \theta) = \dot{r} \cos \theta + r \frac{d}{d\theta}(\cos \theta) \cdot \dot{\theta} \\ &= \dot{r} \cos \theta - r \dot{\theta} \sin \theta, \end{aligned} \quad (1.20a)$$

$$\begin{aligned} \dot{y} &= \dot{r} \sin \theta + r \frac{d}{dt}(\sin \theta) = \dot{r} \sin \theta + r \frac{d}{d\theta}(\sin \theta) \cdot \dot{\theta} \\ &= \dot{r} \sin \theta + r \dot{\theta} \cos \theta. \end{aligned} \quad (1.20b)$$

となる. これを (A1.5a) に代入すると,

$$v_r = (\dot{r} \cos \theta - r \dot{\theta} \sin \theta) \cos \theta + (\dot{r} \sin \theta + r \dot{\theta} \cos \theta) \sin \theta = \dot{r}$$

が, (A1.5b) に代入すると,

$$v_\theta = -(\dot{r} \cos \theta - r \dot{\theta} \sin \theta) \sin \theta + (\dot{r} \sin \theta + r \dot{\theta} \cos \theta) \cos \theta = r \dot{\theta}$$

が得られ, 速度の動径成分が $\dot{r}$, 角成分が $r \dot{\theta}$ となることが導かれる.

問題 1.6

任意の 2 次元ベクトルについて, デカルト座標系に関する成分と極座標系に関する成分の間には, 関係式 (1.17) が成り立つ. これを用いると, 加速度のデカルト座標系に関する成分 $(\ddot{x}, \ddot{y})$ と, 加速度の極座標系に関する成分 (a_r, a_θ) (加速度の動径成分, 角成分をそれぞれ a_r, a_θ とおいた) の間に, 関係式,

$$a_r = \ddot{x} \cos \theta + \ddot{y} \sin \theta, \quad (A1.6a)$$

$$a_\theta = -\ddot{x} \sin \theta + \ddot{y} \cos \theta, \quad (A1.6b)$$

が成り立つ.

(1.20a) を時間微分すると,

$$\begin{aligned} \ddot{x} &= \ddot{r} \cos \theta + \dot{r} \frac{d}{dt}(\cos \theta) - \dot{r} \dot{\theta} \sin \theta - r \ddot{\theta} \sin \theta - r \dot{\theta} \frac{d}{dt}(\sin \theta) \\ &= \ddot{r} \cos \theta - \dot{r} \dot{\theta} \sin \theta - \dot{r} \dot{\theta} \sin \theta - r \ddot{\theta} \sin \theta - r \dot{\theta}^2 \cos \theta \\ &= (\ddot{r} - r \dot{\theta}^2) \cos \theta - (r \ddot{\theta} + 2\dot{r} \dot{\theta}) \sin \theta \\ &= (\ddot{r} - r \dot{\theta}^2) \cos \theta - \frac{1}{r} \frac{d}{dt}(r^2 \dot{\theta}) \sin \theta \end{aligned}$$

となる. (1.20b) を時間微分すると,

$$\begin{aligned} \ddot{y} &= \ddot{r} \sin \theta + \dot{r} \frac{d}{dt}(\sin \theta) + \dot{r} \dot{\theta} \cos \theta + r \ddot{\theta} \cos \theta + r \dot{\theta} \frac{d}{dt}(\cos \theta) \\ &= \ddot{r} \sin \theta + \dot{r} \dot{\theta} \cos \theta + \dot{r} \dot{\theta} \cos \theta + r \ddot{\theta} \cos \theta - r \dot{\theta}^2 \sin \theta \end{aligned}$$

$$= (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2) \sin \theta + (r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta}) \cos \theta$$

$$= (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2) \sin \theta + \frac{1}{r} \frac{d}{dt}(r^2\dot{\theta}) \cos \theta$$

となる。以上をまとめて書く。

$$\ddot{x} = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2) \cos \theta - \frac{1}{r} \frac{d}{dt}(r^2\dot{\theta}) \sin \theta, \quad (1.21a)$$

$$\ddot{y} = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2) \sin \theta + \frac{1}{r} \frac{d}{dt}(r^2\dot{\theta}) \cos \theta. \quad (1.21b)$$

(1.21) を (A1.6a) に代入すると,

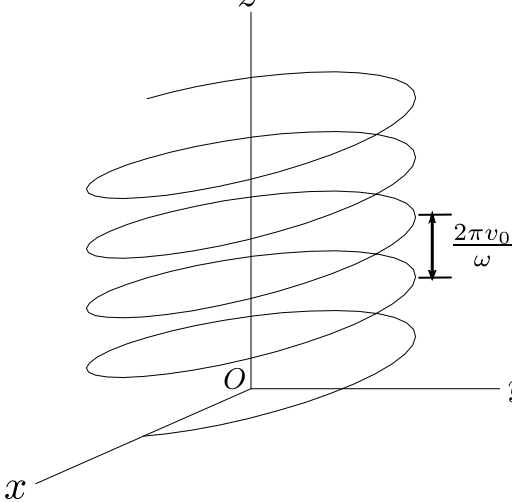
$$\begin{aligned} a_r &= \left[(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2) \cos \theta - \frac{1}{r} \frac{d}{dt}(r^2\dot{\theta}) \sin \theta \right] \cos \theta + \left[(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2) \sin \theta + \frac{1}{r} \frac{d}{dt}(r^2\dot{\theta}) \cos \theta \right] \sin \theta \\ &= \ddot{r} - r\dot{\theta}^2 \end{aligned}$$

となる。(1.21) を (A1.6b) に代入すると,

$$\begin{aligned} a_\theta &= - \left[(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2) \cos \theta - \frac{1}{r} \frac{d}{dt}(r^2\dot{\theta}) \sin \theta \right] \sin \theta + \left[(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2) \sin \theta + \frac{1}{r} \frac{d}{dt}(r^2\dot{\theta}) \cos \theta \right] \cos \theta \\ &= \frac{1}{r} \frac{d}{dt}(r^2\dot{\theta}) \end{aligned}$$

となる。

1.4 円筒座標系



問題 1.7

この運動を xy 面に投影したものは、半径が a で角速度 ω の原点を中心とする等速円運動である。これを z 方向（円に垂直）に一定の速さ v_0 で動かした螺旋（らせん）運動となる。回転の周期は $T = \frac{2\pi}{\omega}$ であるから、螺旋の間隔は $\frac{2\pi v_0}{\omega}$ で与えられる。円筒座標 (ρ, ϕ, z) を用いると,

$$\rho = a, \quad \phi = \omega t, \quad z = v_0 t \quad (A1.7)$$

y という簡単な t の関数になる。