

第4章 角運動量と力のモーメント

問題 4.1

[1] 問題 1.7 の (1.27) を時間微分して速度を求める.

$$\dot{x} = -\omega a \sin \omega t, \quad (\text{A4.1a})$$

$$\dot{y} = \omega a \cos \omega t, \quad (\text{A4.1b})$$

$$\dot{z} = v_0. \quad (\text{A4.1c})$$

(4.9) 式左辺の $[\dots]$ 内より, デカルト座標系では, 角運動量 $\mathbf{L} = (L_x, L_y, L_z)$ は,

$$L_x = m(y\dot{z} - z\dot{y}), \quad (\text{A4.2a})$$

$$L_y = m(z\dot{x} - x\dot{z}), \quad (\text{A4.2b})$$

$$L_z = m(x\dot{y} - y\dot{x}), \quad (\text{A4.2c})$$

なる成分を持つベクトルとなる. これに (1.27), (A4.1) を代入すると, 角運動量の x 成分は,

$$L_x = m[a \sin \omega t \cdot v_0 - v_0 t \cdot (\omega a \cos \omega t)]$$

$$\therefore L_x = mav_0(\sin \omega t - \omega t \cos \omega t), \quad (\text{A4.3})$$

y 成分は,

$$L_y = m[v_0 t \cdot (-\omega a \sin \omega t) - a \cos \omega t \cdot v_0]$$

$$\therefore L_y = -mav_0(\cos \omega t + \omega t \sin \omega t) \quad (\text{A4.4})$$

z 成分は,

$$L_z = m[a \cos \omega t \cdot (\omega a \cos \omega t) - a \sin \omega t \cdot (-\omega a \sin \omega t)]$$

$$\therefore L_z = ma^2\omega \quad (\text{A4.5})$$

となる.

[2] まず, 角運動量の時間微分を計算すると, 以下のようにになる.

$$\dot{L}_x = mav_0(\omega \cos \omega t - \omega \cos \omega t + \omega^2 t \sin \omega t) = mav_0\omega^2 t \sin \omega t, \quad (\text{A4.6a})$$

$$\dot{L}_y = -mav_0(-\omega \sin \omega t + \omega \sin \omega t + \omega^2 t \cos \omega t) = -mav_0\omega^2 t \cos \omega t, \quad (\text{A4.6b})$$

$$\dot{L}_z = 0. \quad (\text{A4.6c})$$

見通しをよくするため、この x, y 成分を、(1.27) で定義されるデカルト座標で書き換える。

$$\dot{L}_x = m\omega^2 zy, \quad (\text{A4.7a})$$

$$\dot{L}_y = -m\omega^2 zx. \quad (\text{A4.7b})$$

ここで、角運動量方程式 (4.9) において、 $F_z = 0$ を考慮すると、以下の等式が成り立つ。

$$-zF_y = m\omega^2 zy, \quad (\text{A4.8a})$$

$$zF_x = -m\omega^2 zx, \quad (\text{A4.8b})$$

$$xF_y - yF_x = 0. \quad (\text{A4.8c})$$

$t = 0$ 以外では $z \neq 0$ であることより、両辺を z で割ると、力の x, y 成分が、

$$F_x = -m\omega^2 x,$$

$$F_y = -m\omega^2 y,$$

のように求まる。

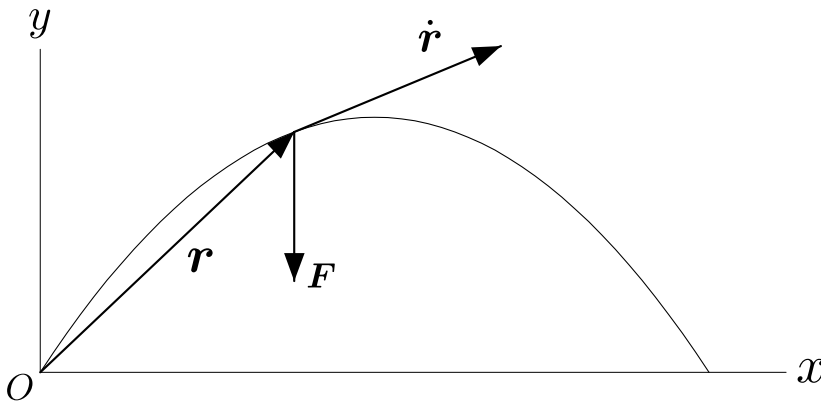
問題 4.2

例題 2.1 の結果より、時刻 t における座標は、

$$x = v_0 \cos \theta_0 \cdot t, \quad (\text{2.16a})$$

$$y = -\frac{1}{2}gt^2 + v_0 \sin \theta_0 \cdot t, \quad (\text{2.16b})$$

である。ここで、 x 座標は水平右向きに、 y 座標は鉛直上向きにとった。又、以下の解答で z 軸は紙面に垂直で、内から外へ向かう向きとする。



まず, (2.16) より速度を計算しておく.

$$\dot{x} = v_0 \cos \theta_0, \quad (2.13a)$$

$$\dot{y} = -gt + v_0 \sin \theta_0. \quad (2.13b)$$

次に, 各物理量をベクトルで表しておく. 位置ベクトルは, $\mathbf{r} = (x, y, 0)$, 速度ベクトルは, $\dot{\mathbf{r}} = (\dot{x}, \dot{y}, 0)$, 重力のベクトルは, 質点の質量を m とおくと, $\mathbf{F} = (0, -mg, 0)$, と表される. ベクトル積を計算することより, 角運動量は,

$$m\mathbf{r} \times \dot{\mathbf{r}} = (0, 0, m(x\dot{y} - y\dot{x}))$$

となる. ところで, (2.16), (2.13) より, その z 成分は,

$$\begin{aligned} L_z = m(x\dot{y} - y\dot{x}) &= m \left[(v_0 \cos \theta_0 \cdot t) \cdot (v_0 \sin \theta_0 - gt) - \left(v_0 \sin \theta_0 \cdot t - \frac{1}{2}gt^2 \right) \cdot (v_0 \cos \theta_0) \right] \\ &= -\frac{1}{2}mv_0 \cos \theta_0 \cdot gt^2 \end{aligned} \quad (A4.9)$$

となる. 又, 重力による力のモーメントは,

$$\mathbf{r} \times \mathbf{F} = (0, 0, -mgx)$$

となるが, (2.16a) より, その z 成分は,

$$N_z = -mgv_0 \cos \theta_0 \cdot t \quad (A4.10)$$

となる.

(A4.9) を時間微分すれば,

$$\dot{L}_z = -mgv_0 \cos \theta_0 \cdot t \quad (A4.11)$$

となる. これは重力による力のモーメントの z 成分 (A4.10) と等しくなることから, 角運動量方程式の z 成分,

$$\dot{L}_z = N_z \quad (4.9c)$$

が成り立つことが確認できる.

問題 4.3

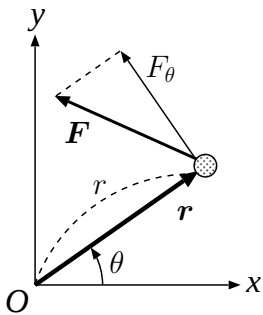
r は原点から質点までの距離, θ は x 軸の正の向きに対する位置ベクトルのなす角である. これらはデカルト座標と,

$$x = r \cos \theta, \quad y = r \sin \theta, \quad (1.7)$$

なる関係にある. これを時間微分すると,

$$\dot{x} = \dot{r} \cos \theta - r\dot{\theta} \sin \theta,$$

$$\dot{y} = \dot{r} \sin \theta + r\dot{\theta} \cos \theta,$$



となる。これより、角運動量の z 成分は、

$$m(x\dot{y} - y\dot{x}) = mr^2\dot{\theta} \quad (4.12)$$

となる。よって、角運動量方程式の z 成分は、

$$\frac{d}{dt}(mr^2\dot{\theta}) = r(F_y \cos \theta - F_x \sin \theta)$$

となる。力の角成分 F_θ は、

$$F_\theta = -F_x \sin \theta + F_y \cos \theta, \quad (4.11b)$$

なる関係を満たすから、角運動量方程式の z 成分は、

$$\frac{d}{dt}(mr^2\dot{\theta}) = rF_\theta \quad (4.10)$$

と表される。これは、運動方程式の角成分を r で割った式に等しい。

2次元極座標系に関する表式: ベクトル表記での導出

2次元極座標系の基本ベクトル $\{\mathbf{e}_r, \mathbf{e}_\theta\}$ を用いた表記では、位置ベクトル $\mathbf{r}$, 速度 $\dot{\mathbf{r}}$, 力 $\mathbf{F}$ は、

$$\mathbf{r} = r\mathbf{e}_r, \quad (1.8)$$

$$\dot{\mathbf{r}} = \dot{r}\mathbf{e}_r + r\dot{\theta}\mathbf{e}_\theta, \quad (1.13)$$

$$\mathbf{F} = F_r\mathbf{e}_r + F_\theta\mathbf{e}_\theta, \quad (A4.12)$$

と表される。この場合、角運動量 $\mathbf{L} = m\mathbf{r} \times \dot{\mathbf{r}}$, 力のモーメント $\mathbf{N} = \mathbf{r} \times \mathbf{F}$ は、以下のように表される。

$$\mathbf{L} = m(r\mathbf{e}_r) \times (\dot{r}\mathbf{e}_r + r\dot{\theta}\mathbf{e}_\theta) = mr\dot{r}\mathbf{e}_r \times \mathbf{e}_r + mr^2\dot{\theta}\mathbf{e}_r \times \mathbf{e}_\theta$$

$$\mathbf{N} = (r\mathbf{e}_r) \times (F_r\mathbf{e}_r + F_\theta\mathbf{e}_\theta) = rF_r\mathbf{e}_r \times \mathbf{e}_r + rF_\theta\mathbf{e}_r \times \mathbf{e}_\theta$$

ここで基本ベクトルのベクトル積の関係式、

$$\mathbf{e}_r \times \mathbf{e}_r = \mathbf{0}, \quad \mathbf{e}_r \times \mathbf{e}_\theta = \mathbf{e}_z,$$

を用いると、

$$\mathbf{L} = mr^2\dot{\theta}\mathbf{e}_z, \quad \mathbf{N} = rF_\theta\mathbf{e}_z$$

となる。これを角運動量方程式 $\dot{\mathbf{L}} = \mathbf{N}$ に代入すると、

$$\frac{d}{dt}(mr^2\dot{\theta})\mathbf{e}_z = rF_\theta\mathbf{e}_z$$

に帰着する。

問題 4.4

[1] 問題 1.3[1] の解答より、角速度は、

$$\dot{\theta} = -\frac{v_0}{r_0 \sin \theta} \quad (A1.1)$$

である。これを問題 4.3 により得られた角運動量の z 成分の表式,

$$L_z = mr_0^2 \dot{\theta}$$

に代入すると,

$$L_z = -\frac{mr_0 v_0}{\sin \theta} \quad (\text{A4.13})$$

が得られる。

[2] (A4.13) を時間微分すると,

$$\begin{aligned} \dot{L}_z &= -mr_0 v_0 \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{\sin \theta} \right) \\ &= -mr_0 v_0 \frac{d}{d\theta} \left(\frac{1}{\sin \theta} \right) \dot{\theta} \\ &= mr_0 v_0 \frac{\cos \theta}{\sin^2 \theta} \dot{\theta} \end{aligned}$$

となる。これに (A1.1) を代入すると,

$$\dot{L}_z = -mv_0^2 \frac{\cos \theta}{\sin^3 \theta}$$

が得られる。角運動量の z 成分の時間微分 $\dot{L}_z$ は力のモーメントの z 成分 N_z に等しいので,

$$N_z = -mv_0^2 \frac{\cos \theta}{\sin^3 \theta} \quad (\text{A4.14})$$

である。

少し違う導出

力の角成分 F_θ は加速度の角成分を a_θ と置くと, $F_\theta = ma_\theta$ となる。これに問題 1.3[2] の結果,

$$a_\theta = -\frac{v_0^2 \cos \theta}{r_0 \sin^3 \theta} \quad (\text{A4.15})$$

を適用すると,

$$F_\theta = -\frac{mv_0^2 \cos \theta}{r_0 \sin^3 \theta}$$

となる。力のモーメントの z 成分 N_z は問題 4.3 の結果より, $N_z = r_0 F_\theta$ となる。これに (A4.15) を適用すると,

$$N_z = -mv_0^2 \frac{\cos \theta}{\sin^3 \theta} \quad (\text{A4.14})$$

が得られる。