

第6章 束縛運動

2次元極座標系に関する基本事項

2次元極座標系の運動方程式

xy 平面上を運動する場合について、デカルト座標系における運動方程式から、2次元極座標系における運動方程式を導出する。

デカルト座標系における運動方程式は、

$$m\ddot{x} = m\dot{v}_x = F_x, \quad (2.6a)$$

$$m\ddot{y} = m\dot{v}_y = F_y, \quad (2.6b)$$

である。

加速度 $(\ddot{x}, \ddot{y})$ を極座標 (r, θ) で表す。まず、

$$x = r \cos \theta, \quad (1.7a)$$

$$y = r \sin \theta, \quad (1.7b)$$

を時間微分する。 $\cos \theta, \sin \theta$ の時間微分は、合成関数の微分として、それぞれ、

$$\frac{d}{dt}(\cos \theta) = \frac{d}{d\theta}(\cos \theta) \cdot \frac{d\theta}{dt} = -\dot{\theta} \sin \theta,$$

$$\frac{d}{dt}(\sin \theta) = \frac{d}{d\theta}(\sin \theta) \cdot \frac{d\theta}{dt} = \dot{\theta} \cos \theta,$$

と計算されることに留意する。そうすると、

$$\dot{x} = \dot{r} \cos \theta + r \frac{d}{dt}(\cos \theta) = \dot{r} \cos \theta - r\dot{\theta} \sin \theta, \quad (1.20a)$$

$$\dot{y} = \dot{r} \sin \theta + r \frac{d}{dt}(\sin \theta) = \dot{r} \sin \theta + r\dot{\theta} \cos \theta. \quad (1.20b)$$

となる。速度の動径成分、角成分をそれぞれ (v_r, v_θ) とすると、これらは、速度のデカルト座標系に関する成分 $(\dot{x}, \dot{y})$ と、

$$v_r = \dot{x} \cos \theta + \dot{y} \sin \theta, \quad (A1.5a)$$

$$v_\theta = -\dot{x} \sin \theta + \dot{y} \cos \theta, \quad (A1.5b)$$

なる関係にある。(1.20a), (1.20b) を (A1.5a) に代入することで、速度の動径成分が、以下のように求まる。

$$v_r = (\dot{r} \cos \theta - r\dot{\theta} \sin \theta) \cos \theta + (\dot{r} \sin \theta + r\dot{\theta} \cos \theta) \sin \theta = \dot{r}$$

(1.20a), (1.20b) を (A1.5b) に代入することで, 速度の角成分が, 以下のように求まる.

$$v_\theta = -(\dot{r} \cos \theta - r\dot{\theta} \sin \theta) \sin \theta + (\dot{r} \sin \theta + r\dot{\theta} \cos \theta) \cos \theta = r\dot{\theta}$$

(1.20a) を時間微分すると,

$$\begin{aligned}\ddot{x} &= \ddot{r} \cos \theta + \dot{r} \frac{d}{dt}(\cos \theta) - \dot{r}\dot{\theta} \sin \theta - r\ddot{\theta} \sin \theta - r\dot{\theta} \frac{d}{dt}(\sin \theta) \\ &= \ddot{r} \cos \theta - \dot{r}\dot{\theta} \sin \theta - \dot{r}\dot{\theta} \sin \theta - r\ddot{\theta} \sin \theta - r\dot{\theta}^2 \cos \theta \\ &= (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2) \cos \theta - (r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta}) \sin \theta \\ &= (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2) \cos \theta - \frac{1}{r} \frac{d}{dt}(r^2\dot{\theta}) \sin \theta\end{aligned}$$

となる. (1.20b) を時間微分すると,

$$\begin{aligned}\ddot{y} &= \ddot{r} \sin \theta + \dot{r} \frac{d}{dt}(\sin \theta) + \dot{r}\dot{\theta} \cos \theta + r\ddot{\theta} \cos \theta + r\dot{\theta} \frac{d}{dt}(\cos \theta) \\ &= \ddot{r} \sin \theta + \dot{r}\dot{\theta} \cos \theta + \dot{r}\dot{\theta} \cos \theta + r\ddot{\theta} \cos \theta - r\dot{\theta}^2 \sin \theta \\ &= (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2) \sin \theta + (r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta}) \cos \theta \\ &= (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2) \sin \theta + \frac{1}{r} \frac{d}{dt}(r^2\dot{\theta}) \cos \theta\end{aligned}$$

となる. 以上をまとめて書く.

$$\ddot{x} = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2) \cos \theta - \frac{1}{r} \frac{d}{dt}(r^2\dot{\theta}) \sin \theta, \quad (1.21a)$$

$$\ddot{y} = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2) \sin \theta + \frac{1}{r} \frac{d}{dt}(r^2\dot{\theta}) \cos \theta. \quad (1.21b)$$

(1.21a), (1.21b) を運動方程式 (2.6a), (2.6a) の加速度の部分に代入する.

$$m(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2) \cos \theta - m \frac{1}{r} \frac{d}{dt}(r^2\dot{\theta}) \sin \theta = F_x, \quad (A6.1)$$

$$m(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2) \sin \theta + m \frac{1}{r} \frac{d}{dt}(r^2\dot{\theta}) \cos \theta = F_y \quad (A6.2)$$

(A6.1) $\times \cos \theta$ + (A6.2) $\times \sin \theta$ より運動方程式の動径成分が以下のように得られる.

$$m(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2) = F_x \cos \theta + F_y \sin \theta$$

(A6.1) $\times (-\sin \theta)$ + (A6.2) $\times \cos \theta$ より運動方程式の角成分が以下のように得られる.

$$m \frac{1}{r} \frac{d}{dt}(r^2\dot{\theta}) = -F_x \sin \theta + F_y \cos \theta$$

ここで, 運動方程式の動径成分の右辺は力の動径成分 F_r を, 運動方程式の角成分の右辺は力の角成分 F_θ を表すから, 2次元極座標系における運動方程式は,

$$m(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2) = F_r, \quad (2.7a)$$

$$m \frac{1}{r} \frac{d}{dt}(r^2\dot{\theta}) = F_\theta, \quad (2.7b)$$

となる.

2次元極座標系のエネルギー論

平面上を運動する場合について，2次元極座標系を用いてエネルギー方程式を定式化する．

2次元極座標系では，速度の動径成分 v_r ，角成分 v_θ は，

$$v_r = \dot{r}, \quad v_\theta = r\dot{\theta},$$

であった．加速度の動径成分 a_r ，角成分 a_θ を速度の動径成分，角成分で表す．速度ベクトルは，極座標系の基本ベクトルを用いて，

$$\mathbf{v} = v_r \mathbf{e}_r + v_\theta \mathbf{e}_\theta \quad (\text{A6.3})$$

と表される．これを時間微分し，加速度ベクトルを求めると，

$$\dot{\mathbf{v}} = (\dot{v}_r - \dot{\theta}v_\theta) \mathbf{e}_r + (\dot{v}_\theta + \dot{\theta}v_r) \mathbf{e}_\theta \quad (\text{A6.4})$$

となる．この導出に関しては，問題 1.4 を参照する．これより，

$$a_r = \dot{v}_r - \dot{\theta}v_\theta, \quad a_\theta = \dot{v}_\theta + \dot{\theta}v_r,$$

となる．従って，2次元極座標系における運動方程式は，(2.7) の代わりに，

$$m(\dot{v}_r - \dot{\theta}v_\theta) = F_r, \quad (\text{A6.5a})$$

$$m(\dot{v}_\theta + \dot{\theta}v_r) = F_\theta, \quad (\text{A6.5b})$$

となる．

(A6.5a) $\times v_r$ + (A6.5b) $\times v_\theta$ より，2次元極座標系におけるエネルギー方程式が以下のように得られる．

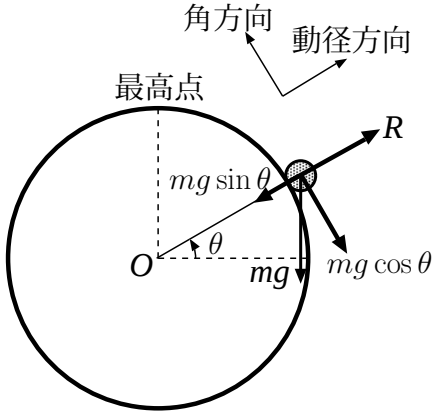
$$\frac{d}{dt} \left[\frac{1}{2} m (v_r^2 + v_\theta^2) \right] = F_r v_r + F_\theta v_\theta \quad (\text{A6.6})$$

円運動の場合， $\dot{r} = 0$ より $v_r = \dot{r} = 0$ となるから，エネルギー方程式 (A6.6) は，

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} m v_\theta^2 \right) = F_\theta v_\theta \quad (\text{A6.7})$$

となる．円運動の場合，動径方向には運動しないので，力の動径成分がなす仕事率 $F_r v_r$ は 0 で，力の動径成分は仕事をしない．従って，エネルギー方程式に，運動方程式の動径成分は関与しない．

6.1 円周上に束縛された運動



【問題 6.2 の解答】

[1] 水平右向きから反時計回りにはかった、質点の位置ベクトルがなす角度を θ とおく。

動径方向に関しては、外向きに円周からの抗力 R が、内向きに重力の分力 $mg \sin \theta$ が作用する。一方、角方向に関しては、時計回りに重力の分力 $mg \cos \theta$ が作用する。従って、極座標系で表した質点の運動方程式は、

$$-mr_0\dot{\theta}^2 = R - mg \sin \theta, \quad (\text{A6.8a})$$

$$mr_0\ddot{\theta} = -mg \cos \theta, \quad (\text{A6.8b})$$

となる。ここで $r = r_0$ は一定であることを考慮した。

[2] (A6.8b) の両辺に、速度の動径成分 $r_0\dot{\theta}$ を掛ける。

$$mr_0^2\dot{\theta}\ddot{\theta} = -mgr_0\dot{\theta} \cos \theta$$

各辺を順次変形する。

$$mr_0^2 \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} \dot{\theta}^2 \right) = -mgr_0 \frac{d}{d\theta} \left(\int \cos \theta d\theta \right) \frac{d\theta}{dt}$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} mr_0^2 \dot{\theta}^2 \right) &= -mgr_0 \frac{d}{d\theta} (\sin \theta + U_0) \frac{d\theta}{dt} \\ &= -mgr_0 \frac{d}{dt} (\sin \theta + U_0) \end{aligned}$$

$$\therefore \frac{d}{dt} \left[\frac{1}{2} mr_0^2 \dot{\theta}^2 + mgr_0 (\sin \theta + U_0) \right] = 0$$

ここで、 U_0 は積分定数である。左辺 ($\dots$) 内の $mgr_0(\sin \theta + U_0)$ の項がポテンシャルエネルギーを表す。 $\theta = 0$ でポテンシャルエネルギーが 0 となるように基準を決めると、 $U_0 = 0$ と定まる。従って、上式は、

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} mr_0^2 \dot{\theta}^2 + mgr_0 \sin \theta \right) = 0 \quad (\text{A6.9})$$

と表される。この方程式は、運動エネルギー $\frac{1}{2} mr_0^2 \dot{\theta}^2$ とポテンシャルエネルギー $mgr_0 \sin \theta$ の和で定義される全エネルギー、

$$E = \frac{1}{2} mr_0^2 \dot{\theta}^2 + mgr_0 \sin \theta \quad (\text{A6.10})$$

が保存することを意味する。(A6.9) 式の導出で運動方程式の動径成分 (A6.8a) を使わなかったのは、質点が動径方向には運動しないため、抗力及び重力の分力は仕事をしないからである。

[3] 質点が最高点にある状態 $\theta = \frac{\pi}{2}$, $\dot{\theta} = 0$ と、任意の角度にある状態 $\theta = \theta$, $\dot{\theta} = \dot{\theta}$ との間で全エネルギー (A6.10) が等しいことを適用すると、

$$\frac{1}{2} mr_0^2 \dot{\theta}^2 + mgr_0 \sin \theta = mgr_0 \quad (\text{A6.11})$$

が成り立つ。これより,

$$mr_0\dot{\theta}^2 = 2mg(1 - \sin \theta)$$

となる。これを (A6.8a) に代入する。

$$-2mg(1 - \sin \theta) = R - mg \sin \theta$$

R について解くと,

$$R = mg(3 \sin \theta - 2) \tag{A6.12}$$

が得られる。

[4] 質点が円を離れるのは、抗力 R が 0 となる時である。その時の角度は、(A6.12) より,

$$mg(3 \sin \theta - 2) = 0$$

を解いて,

$$\sin \theta = \frac{2}{3}$$

と求まる。sine 関数の逆関数を用いて表すと,

$$\theta = \sin^{-1} \left(\frac{2}{3} \right)$$

と表される。