第 5 章　仕事とエネルギー

5.1　１次元の場合

問題 5.1

問題 2.2 の運動方程式は，

$$m\ddot{x} = mg\sin\beta \tag{A2.1}$$

となる．この両辺に速度 $\dot{x}$ を掛け，変形すると，

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}m\dot{x}^2 - mg\sin\beta\cdot x + U_0\right) = 0$$

に帰着する．ここで U_0 は積分定数である．重力によるポテンシャルエネルギー U は，

$$U = -mg\sin\beta\cdot x + U_0$$

である．原点 $x = 0$ でポテンシャルエネルギーが 0 となるように積分定数を決めると， $U_0 = 0$ と定まるから，ポテンシャルエネルギーは，

$$U = -mg\sin\beta\cdot x$$

となる．全エネルギーは，

$$E = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 - mg\sin\beta\cdot x$$

となり，$\dfrac{dE}{dt} = 0$ より保存する．

問題 5.3

[1] 運動方程式 (5.15) の両辺に，速度 $\dot{x}$ を掛け，変形する．

$$
\begin{aligned}
m\dot{x}\ddot{x} &= -\lambda e^{-ax}(1-e^{-ax})\cdot\frac{dx}{dt} \\
\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}m\dot{x}^2\right) &= -\frac{d}{dx}\left(\lambda\int e^{-ax}(1-e^{-ax})dx\right)\cdot\frac{dx}{dt} \\
&= -\frac{d}{dx}\left[\frac{\lambda}{2a}e^{-ax}(e^{-ax}-2)+U_0\right]\cdot\frac{dx}{dt} \\
&= -\frac{d}{dt}\left[\frac{\lambda}{2a}e^{-ax}(e^{-ax}-2)+U_0\right] \\
\therefore\quad \frac{d}{dt}\left[\frac{1}{2}m\dot{x}^2+\frac{\lambda}{2a}e^{-ax}(e^{-ax}-2)+U_0\right] &= 0
\end{aligned}
$$

ここで，U_0 は積分定数である．これは，運動エネルギー $\frac{1}{2}m\dot{x}^2$ と，ポテンシャルエネルギー

$$U=\frac{\lambda}{2a}e^{-ax}(e^{-ax}-2)+U_0$$

の和で定義される全エネルギー

$$E=\frac{1}{2}m\dot{x}^2+\frac{\lambda}{2a}e^{-ax}(e^{-ax}-2)+U_0$$

が保存することを示す．

未定の定数 U_0 は，$x\to\infty$ でポテンシャルエネルギーが 0 となる条件を付けると，$U_0=0$ のように値が定まる．従って，ポテンシャルエネルギーは，

$$U=\frac{\lambda}{2a}e^{-ax}(e^{-ax}-2), \tag{A5.1}$$

全エネルギーは，

$$E=\frac{1}{2}m\dot{x}^2+\frac{\lambda}{2a}e^{-ax}(e^{-ax}-2) \tag{A5.2}$$

となる．

[2] 初期に $x=0$ で $\dot{x}=v_0$ とすると，(A5.2) に代入することで，全エネルギーが，

$$E=\frac{1}{2}mv_0^2-\frac{\lambda}{2a} \tag{A5.3}$$

と定まる．この初期の状態と，任意の状態（座標 x，速度 $\dot{x}$）との間で，全エネルギーが等しいことにより，等式，

$$\frac{1}{2}m\dot{x}^2+\frac{\lambda}{2a}e^{-ax}(e^{-ax}-2)=\frac{1}{2}mv_0^2-\frac{\lambda}{2a} \tag{A5.4}$$

$x\to\infty$ における速度を v_∞ とすると，初期の状態と無限遠方に達した時の間で全エネルギーが等しいことより，等式，

$$\frac{1}{2}mv_\infty^2=\frac{1}{2}mv_0^2-\frac{\lambda}{2a}$$

が成り立つ．$x \to \infty$ に到達しうるためには，$\frac{1}{2}mv_\infty^2 > 0$ でなければならない．従って，

$$\frac{1}{2}mv_0^2 - \frac{\lambda}{2a} > 0$$

でなければならない．この不等式は整理すると，

$$v_0 > \sqrt{\frac{\lambda}{ma}}$$

と表される．

付録「ポテンシャルエネルギーの図による考察」

図に，ポテンシャルエネルギー (A5.1) の x 依存性を示す．この図に，全エネルギーの値 (A5.3) の直線で重ねて示す．

ポテンシャルエネルギーは，$x \geq 0$ の場合，$U < 0$ であるから，$E > 0$ であるならば，U の曲線と 値 E との交点は存在しない．この場合，運動可能な範囲は，x の正の全範囲 $0 \leq x < \infty$ となる