

5.1.4 保存力でない力

問題 5.6

運動方程式の解

最初に斜面を上る向きに運動をし、最高点に達する。その後、斜面を下る向きに運動の向きを変える。最高点に達する時刻と、最高点の座標を求める。

$\dot{x} < 0$ の場合の運動方程式を時間積分し、 $t = 0$ で $\dot{x} = -v_0$ なる初期条件を適用すると、速度が、

$$\dot{x} = g(\sin \beta + \mu' \cos \beta)t - v_0 \quad (\text{A5.5})$$

と求まる。これを更に時間積分し、 $t = 0$ で $x = 0$ なる初期条件を適用すると、座標が、

$$x = \frac{1}{2}g(\sin \beta + \mu' \cos \beta)t^2 - v_0 t \quad (\text{A5.6})$$

と求まる。

(A5.5) において $\dot{x} = 0$ となる時刻を求めると、

$$t = \frac{v_0}{g(\sin \beta + \mu' \cos \beta)}$$

となる。これを (A5.6) に代入すると、最高点の座標 x_m が、

$$x_m = -\frac{v_0^2}{2g(\sin \beta + \mu' \cos \beta)}$$

と求まる。

斜面を上る間の仕事

斜面を上る間、即ち、出発点 $x = 0$ から最高点 $x = x_m$ までの間に、重力と摩擦力がなす仕事を計算する。

仕事は、(5.5) 式の右辺に基づき、力を座標について積分することで求める。

重力 $mg \sin \beta$ を $x = 0$ から $x = x_m$ まで積分すると、重力がなす仕事が、

$$W_G(0 \rightarrow x_m) = \int_0^{x_m} mg \sin \beta dx = mg \sin \beta \cdot x_m$$

と求まる。

$\dot{x} < 0$ の場合の動摩擦力 $\mu' mg \cos \beta$ を $x = 0$ から $x = x_m$ まで積分すると、動摩擦力がなす仕事が、

$$W_F(0 \rightarrow x_m) = \int_0^{x_m} \mu' mg \cos \beta dx = \mu' mg \cos \beta \cdot x_m$$

と求まる。

斜面を下る間の仕事

斜面を下る間、即ち、最高点 $x = x_m$ から出発点 $x = 0$ に戻るまでの間に、重力と摩擦力がなす仕事を計算する。

重力 $mg \sin \beta$ を $x = x_m$ から $x = 0$ まで積分すると、重力がなす仕事が、

$$W_G(x_m \rightarrow 0) = \int_{x_m}^0 mg \sin \beta dx = -mg \sin \beta \cdot x_m$$

と求まる。

$\dot{x} > 0$ の場合の動摩擦力 $-\mu' mg \cos \beta$ を $x = x_m$ から $x = 0$ まで積分すると、動摩擦力がなす仕事が、

$$W_F(x_m \rightarrow 0) = \int_{x_m}^0 (-\mu' mg \cos \beta) dx = \mu' mg \cos \beta \cdot x_m$$

と求まる。

保存力かどうかの判定

$x = 0$ を出発して $x = 0$ に戻ってくるまでに、重力がなす仕事と、動摩擦力がなす仕事を求める。

重力がなす仕事は、

$$\begin{aligned} W_G(0 \rightarrow x_m) + W_G(x_m \rightarrow 0) \\ = mg \sin \beta \cdot x_m - mg \sin \beta \cdot x_m = 0 \end{aligned}$$

となる。同じ位置に戻ってくるまでになす仕事が 0 なので、重力のなす仕事は運動の経路に依存しない。即ち、重力は保存力である。

動摩擦力がなす仕事は、

$$W_F(0 \rightarrow x_m) + W_F(x_m \rightarrow 0) = \mu' mg \cos \beta \cdot x_m + \mu' mg \cos \beta \cdot x_m = 2\mu' mg \cos \beta \cdot x_m$$

となる。同じ位置に戻ってくるまでになす仕事が 0 でない有限な値なので、**動摩擦力のなす仕事は運動の経路に依存する**。即ち、**動摩擦力は保存力でない**。