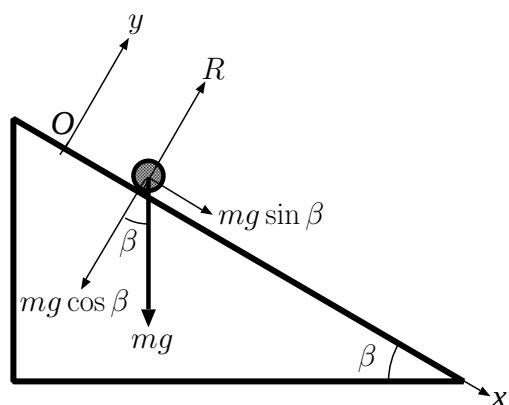


第2章 質点力学

2.3 運動方程式の解法: 加速度が一定の場合

問題 2.2



[1] 重力の斜面に平行な成分は $mg \sin \beta$ である。従って、運動方程式の x 成分は、

$$m\ddot{x} = mg \sin \beta, \quad (\text{A2.1})$$

となる。

[2] 運動方程式の両辺を m で割る。

$$\ddot{x} = g \sin \beta,$$

これを時間に関して積分すると、

$$\dot{x} = \int g \sin \beta dt = g \sin \beta \cdot t + C,$$

となる。ここで C は積分定数である。初期条件 $t = 0$ で $\dot{x} = 0$ を適用すると、積分定数は $C = 0$ と定まる。従って、任意の t における速度は、

$$\dot{x} = g \sin \beta \cdot t \quad (\text{A2.2})$$

となる。

[3] (A2.2) を時間に関して積分すると、

$$x = \int g \sin \beta \cdot t dt = \frac{1}{2} g \sin \beta \cdot t^2 + D$$

となる。ここで D は積分定数である。初期条件 $t = 0$ で $x = 0$ を適用すると、積分定数は $D = 0$ と定まる。従って、任意の t における座標は、

$$x = \frac{1}{2} g \sin \beta \cdot t^2$$

となる。

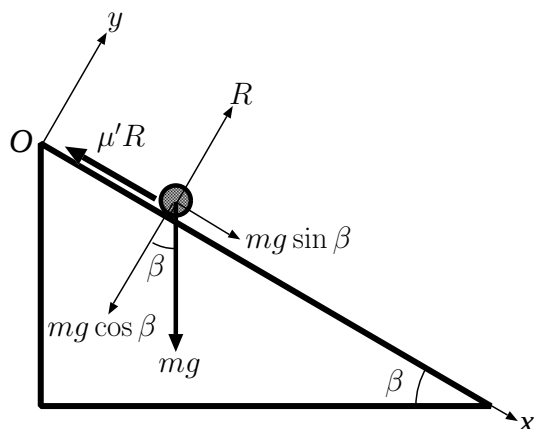
補足

本問では運動方程式の y 成分は問題としなかった。 y 方向に作用する力は、抗力 R と、重力の斜面に垂直な成分は $mg \cos \beta$ である。この2つは大きさが等しく、向きが反対（即ち、作用・反作用の関係）であるため、運動方程式の y 成分は、

$$m\ddot{y} = R - mg \cos \beta = 0,$$

となる。従って、 y 方向には運動が生じない。

問題 2.3



[1] 重力の斜面に平行な成分は $mg \sin \beta$ である。

重力の斜面に垂直な成分は $mg \cos \beta$ であるから、斜面から受ける垂直抗力 R は、これの反作用で、 $R = mg \cos \beta$ となる。動摩擦力の大きさは垂直抗力に比例し、 $\mu' R = \mu' mg \cos \beta$ となる。

初速度を 0 としたので、 $t = 0$ 以後の時刻では質点は斜面を下る向き、即ち、 x 軸の正の向きに速度を持つ。この場合、動摩擦力は、これと逆向きの斜面を上る向き、即ち、 x 軸の負の向きに作用する。

以上より、運動方程式は、

$$m\ddot{x} = mg \sin \beta - \mu' mg \cos \beta, \quad (\text{A2.3})$$

となる。

[2] (A2.3) の両辺を m で割る。

$$\ddot{x} = g(\sin \beta - \mu' \cos \beta)$$

これを時間に関して積分すると、

$$\dot{x} = \int g(\sin \beta - \mu' \cos \beta) dt = g(\sin \beta - \mu' \cos \beta) \cdot t + C,$$

となる。ここで C は積分定数である。初期条件 $t = 0$ で $\dot{x} = 0$ を適用すると、積分定数は $C = 0$ と定まる。従って、任意の t における速度は、

$$\dot{x} = g(\sin \beta - \mu' \cos \beta) \cdot t \quad (\text{A2.4})$$

となる。

[3] (A2.4) を時間に関して積分すると、

$$x = \int g(\sin \beta - \mu' \cos \beta) \cdot t dt = \frac{1}{2} g(\sin \beta - \mu' \cos \beta) \cdot t^2 + D$$

となる。ここで D は積分定数である。初期条件 $t = 0$ で $x = 0$ を適用すると、積分定数は $D = 0$ と定まる。従って、任意の t における座標は、

$$x = \frac{1}{2} g(\sin \beta - \mu' \cos \beta) \cdot t^2$$

となる。