

2.4 運動方程式の解法: 加速度が一定でない場合

問題 2.6

運動方程式を, 左辺は変数 v のみ, 右辺は変数 t のみを含む, 変数分離形に変形すると,

$$\frac{v}{v^2 - \frac{W}{k}} dv = -k dt$$

と表される. 左辺を v , 右辺を t について積分する.

$$\int \frac{v}{v^2 - \frac{W}{k}} dv = -k \int dt \quad (\text{A2.5})$$

左辺の積分を部分積分により計算する.

$$\int \frac{\frac{d}{dv} \left(\frac{v^2}{2} \right)}{v^2 - \frac{W}{k}} dv = -kt + C'$$

ここで, C' は任意定数である.

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \int \frac{\frac{d}{dv} \left(v^2 - \frac{W}{k} \right)}{v^2 - \frac{W}{k}} dv &= -kt + C' \\ \frac{1}{2} \log \left| v^2 - \frac{W}{k} \right| &= -kt + C' \end{aligned} \quad (\text{A2.6})$$

$$\log \left| v^2 - \frac{W}{k} \right| = -2kt + 2C'$$

$$\left| v^2 - \frac{W}{k} \right| = e^{-2kt+2C'}$$

$$v^2 - \frac{W}{k} = \pm e^{-2kt+2C'} = \pm e^{2C'} e^{-2kt}$$

従って一般解は,

$$v^2 = \frac{W}{k} + C e^{-2kt} \quad (\text{A2.7})$$

となる. ここで最後に, 任意定数を $C = \pm e^{2C'}$ と置き換えた.

$t = 0$ で $v = v_0$ となる初期条件より,

$$v_0^2 = \frac{W}{k} + C$$

であるから, 任意定数は,

$$C = v_0^2 - \frac{W}{k}$$

と定まる. 従って, この初期条件を満足する解は,

$$v^2 = \frac{W}{k} + \left(v_0^2 - \frac{W}{k} \right) e^{-2kt},$$

となる. $0 < v_0 < \sqrt{\frac{W}{k}}$ と仮定すると,

$$\frac{d}{dt}(v^2) = 2k \left(\frac{W}{k} - v_0^2 \right) > 0$$

となるから, v^2 は v_0^2 から単調に増加し, $t \rightarrow \infty$ で $v^2 \rightarrow \frac{W}{k}$ となる. $t = 0$ で $v = v_0 > 0$ で, 運動の間 v^2 は 0 となることはないので, 運動の間, $v > 0$ である. 従って,

$$v = \sqrt{\frac{W}{k} + \left(v_0^2 - \frac{W}{k} \right) e^{-2kt}},$$

となる.

【別解 I】 (A2.5) 式左辺の積分の計算法 (その 1)

左辺の被積分関数を以下のように部分分数に展開する.

$$\frac{v}{v^2 - \frac{W}{k}} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{v + \sqrt{\frac{W}{k}}} + \frac{1}{v - \sqrt{\frac{W}{k}}} \right)$$

そうすると, 左辺の積分は次のように計算される.

$$\begin{aligned} \int \frac{v}{v^2 - \frac{W}{k}} dv &= \frac{1}{2} \int \left(\frac{1}{v + \sqrt{\frac{W}{k}}} + \frac{1}{v - \sqrt{\frac{W}{k}}} \right) dv \\ &= \frac{1}{2} \left(\log \left| v + \sqrt{\frac{W}{k}} \right| + \log \left| v - \sqrt{\frac{W}{k}} \right| \right) \\ &= \frac{1}{2} \log \left| \left(v + \sqrt{\frac{W}{k}} \right) \left(v - \sqrt{\frac{W}{k}} \right) \right| \\ &= \frac{1}{2} \log \left| v^2 - \frac{W}{k} \right| \end{aligned}$$

となり, (A2.6) 式左辺と同じ形が得られる. なお, 積分定数は (A2.6) 式右辺の積分に付けるので, ここでは省略した.

【別解 II】 (A2.5) 式左辺の積分の計算法 (その 2)

$$v = \sqrt{\frac{W}{k}} \sin \theta$$

と変数変換をする.

$$v^2 - \frac{W}{k} = \frac{W}{k} (\sin^2 \theta - 1) = -\frac{W}{k} \cos^2 \theta,$$

$$dv = \sqrt{\frac{W}{k}} \cos \theta d\theta,$$

であるから,

$$\int \frac{v}{v^2 - \frac{W}{k}} dv = - \int \frac{\sqrt{\frac{W}{k}} \sin \theta}{\frac{W}{k} \cos^2 \theta} \cdot \sqrt{\frac{W}{k}} \cos \theta d\theta$$

$$\begin{aligned}
&= - \int \frac{\sin \theta}{\cos \theta} d\theta = \int \frac{(\cos \theta)'}{\cos \theta} d\theta \\
&= \log |\cos \theta|
\end{aligned}$$

となる．なお，積分定数は (A2.6) 式右辺の積分に付けるので，ここでは省略した．よって，(A2.6) は，

$$\log |\cos \theta| = -kt + C'$$

となる．これを順次変形する．

$$|\cos \theta| = e^{C'} \cdot e^{-kt}$$

$$\cos \theta = \pm e^{C'} \cdot e^{-kt} = C'' e^{-kt}$$

最後の式では，任意定数 C' を $C'' = \pm e^{C'}$ と置き換えた．ここで両辺を 2 乗する．

$$1 - \sin^2 \theta = C''^2 e^{-2kt}$$

両辺に $\frac{W}{k}$ を掛ける．

$$\frac{W}{k} - \frac{W}{k} \sin^2 \theta = \frac{W}{k} C''^2 e^{-2kt}$$

$$\frac{W}{k} - v^2 = \frac{W}{k} C''^2 e^{-2kt}$$

従って，任意定数を $C = \frac{W}{k} C''^2$ と置き換えると，(A2.7) と同じ形の一般解が得られる．

問題 2.7

運動方程式,

$$\frac{dv}{dt} = -bv \left(v + \frac{a}{b} \right)$$

を, 左辺は変数 v のみ, 右辺は変数 t のみを含む, 変数分離形に変形する.

$$\frac{dv}{v \left(v + \frac{a}{b} \right)} = -b dt$$

次に, 左辺を v , 右辺を t について積分する.

$$\int \frac{dv}{v \left(v + \frac{a}{b} \right)} = -b \int dt \quad (\text{A2.8})$$

ここで, 左辺の被積分関数を部分分数に展開することを考え,

$$\frac{1}{v \left(v + \frac{a}{b} \right)} = \frac{A}{v} + \frac{B}{v + \frac{a}{b}}$$

とおく. A, B はこれから求める定数である. 右辺は,

$$\frac{1}{v \left(v + \frac{a}{b} \right)} = \frac{(A+B)v + A\frac{a}{b}}{v \left(v + \frac{a}{b} \right)}$$

なる形に変形できる. 左辺の分子と右辺の分子を比較することにより, 恒等式,

$$(A+B)v + A\frac{a}{b} = 1$$

が成り立つ. これが任意の v について成り立つためには,

$$A+B=0,$$

$$A\frac{a}{b}=1,$$

でなければならない. これを解くと,

$$A = \frac{b}{a}, \quad B = -\frac{b}{a},$$

と求まる. 従って, (A2.8) の左辺の被積分関数は,

$$\frac{1}{v \left(v + \frac{a}{b} \right)} = \frac{b}{a} \left(\frac{1}{v} - \frac{1}{v + \frac{a}{b}} \right)$$

のように部分分数に展開することができる. この結果, (A2.8) は以下のように変形される.

$$\int \left(\frac{1}{v} - \frac{1}{v + \frac{a}{b}} \right) dv = -a \int dt$$

積分を実行する.

$$\log |v| - \log \left| v + \frac{a}{b} \right| = -at + C'$$

ここで C' は任意定数である. これを順次変形する.

$$\log \left| \frac{v}{v + \frac{a}{b}} \right| = -at + C'$$

$$\left| \frac{v}{v + \frac{a}{b}} \right| = e^{-at+C'} = e^{C'} e^{-at}$$

$$\frac{v}{v + \frac{a}{b}} = \pm e^{C'} e^{-at}$$

ここで，任意定数を $C = \pm e^{C'}$ と置き換える．

$$\frac{v}{v + \frac{a}{b}} = C e^{-at}$$

これを v について解くと，運動方程式 (2.32) の一般解は，

$$v = \frac{C a e^{-at}}{b(1 - C e^{-at})} \quad (\text{A2.9})$$

となる．

$t = 0$ で $v = v_0$ なる初期条件を適用すると，

$$v_0 = \frac{C a}{b(1 - C)}$$

となる．よって， C は，

$$C = \frac{v_0 b}{a + v_0 b}$$

と定まる．これを (A2.9) に代入すると，与えられた初期条件を満たす速度の解は，

$$v = \frac{v_0 a e^{-at}}{a + v_0 b(1 - e^{-at})}$$

となる．