

第7章 振動論

7.2 単振動の解とその性質

問題 7.1

方程式 (7.4) の特解を $x = e^{\lambda t}$ とおき、これを (7.4) に代入する.

$$\lambda^2 e^{\lambda t} = -\omega_0^2 e^{\lambda t},$$

$$(\lambda^2 + \omega_0^2) e^{\lambda t} = 0.$$

$e^{\lambda t} \neq 0$ より両辺を $e^{\lambda t}$ で割ると、特性方程式が、

$$\lambda^2 + \omega_0^2 = 0$$

のように得られる. 特性方程式の解は、 $i = \sqrt{-1}$ を虚数単位として、

$$\lambda = \pm i\omega_0$$

となる.

従って、(7.4) の特解は、 $e^{i\omega_0 t}$ と $e^{-i\omega_0 t}$ の2個となる.

一般解は、 C'_1, C'_2 を任意定数として、

$$x = C'_1 e^{i\omega_0 t} + C'_2 e^{-i\omega_0 t} \quad (\text{A7.1})$$

なる形に表される.

オイラーの公式を用いると、

$$e^{\pm i\omega_0 t} = \cos \omega_0 t \pm i \sin \omega_0 t \quad (\text{複号同順})$$

と書き換えられる. これを (A7.1) に適用する.

$$\begin{aligned} x &= C'_1 (\cos \omega_0 t + i \sin \omega_0 t) + C'_2 (\cos \omega_0 t - i \sin \omega_0 t) \\ &= (C'_1 + C'_2) \cos \omega_0 t + i(C'_1 - C'_2) \sin \omega_0 t \end{aligned}$$

ここで、任意定数を改めて、

$$C_1 = C'_1 + C'_2, \quad C_2 = i(C'_1 - C'_2)$$

と置き換えると、一般解は

$$x = C_1 \cos \omega_0 t + C_2 \sin \omega_0 t \quad (7.5)$$

と書き表される.