

7.3 減衰振動

問題 7.2

方程式 (7.11) の特解を $x = e^{\lambda t}$ とおき, これを (7.11) に代入する.

$$\lambda^2 e^{\lambda t} = -\omega_0^2 e^{\lambda t} - 2\alpha\lambda e^{\lambda t},$$

$$(\lambda^2 + 2\alpha\lambda + \omega_0^2)e^{\lambda t} = 0.$$

$e^{\lambda t} > 0$ より, 特性方程式が,

$$\lambda^2 + 2\alpha\lambda + \omega_0^2 = 0 \quad (\text{A7.2})$$

のように得られる.

特性方程式の解は,

$$\lambda = -\alpha \pm \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2} \quad (7.12)$$

となる.

(i) $\omega_0 > \alpha$ の場合

$\omega_0 > \alpha$ の場合, 特性方程式の解 (7.12) は,

$$\lambda = -\alpha \pm i\sqrt{\omega_0^2 - \alpha^2} \quad (7.13)$$

と変形できる. ここで $i = \sqrt{-1}$ は虚数単位である. 便宜上,

$$\omega_d = \sqrt{\omega_0^2 - \alpha^2} \quad (7.14)$$

とおくと,

$$\lambda = -\alpha \pm i\omega_d \quad (\text{A7.3})$$

と表される.

従って, (7.11) の特解は, $e^{(-\alpha+i\omega_d)t}$ と $e^{(-\alpha-i\omega_d)t}$ の 2 個となる.

一般解は, C'_1, C'_2 を任意定数として,

$$\begin{aligned} x &= C'_1 e^{(-\alpha+i\omega_d)t} + C'_2 e^{(-\alpha-i\omega_d)t} \\ &= e^{-\alpha t} (C'_1 e^{i\omega_d t} + C'_2 e^{-i\omega_d t}) \end{aligned} \quad (\text{A7.4})$$

なる形に表される.

オイラーの公式を用いると,

$$e^{\pm i\omega_d t} = \cos \omega_d t \pm i \sin \omega_d t \quad (\text{複号同順})$$

と書き換えられる. これを (A7.4) に適用する.

$$\begin{aligned} x &= e^{-\alpha t} [C'_1 (\cos \omega_d t + i \sin \omega_d t) + C'_2 (\cos \omega_d t - i \sin \omega_d t)] \\ &= e^{-\alpha t} [(C'_1 + C'_2) \cos \omega_d t + i(C'_1 - C'_2) \sin \omega_d t] \end{aligned}$$

ここで、任意定数を改めて、

$$C_1 = C'_1 + C'_2, \quad C_2 = i(C'_1 - C'_2)$$

と置き換えると、一般解は、

$$x = e^{-\alpha t} (C_1 \cos \omega_d t + C_2 \sin \omega_d t) \quad (7.15)$$

と書き表される。

(ii) $\alpha > \omega_0$ の場合

特性方程式 (A7.2) の解 (7.12) はこれ以上変形できない。この解について、便宜上、

$$\beta = \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2}$$

とおくと、

$$\lambda = -\alpha \pm \beta$$

と表される。

(7.11) の特解は、従って、

$$e^{(-\alpha+\beta)t}, \quad e^{(-\alpha-\beta)t},$$

の2個となる。 C_1, C_2 を任意定数として、(7.11) の一般解は、

$$x = e^{-\alpha t} (C_1 e^{\beta t} + C_2 e^{-\beta t})$$

と表される。

(iii) $\alpha = \omega_0$ の場合

特性方程式の解 (7.12) は、 $\omega_0 = \alpha$ の場合、重解、

$$\lambda = -\alpha$$

となる。

(7.11) の特解の1つは、 $e^{-\alpha t}$ である。もう1つの特解を見つけるため、 ϕ を t の関数として、未知の特解を、

$$x = \phi e^{-\alpha t}$$

なる形におく。この場合、

$$\dot{x} = (\dot{\phi} - \alpha\phi)e^{-\alpha t},$$

$$\ddot{x} = (\ddot{\phi} - 2\alpha\dot{\phi} + \alpha^2\phi)e^{-\alpha t},$$

となる。これらを $\omega_0 = \alpha$ の場合の方程式、

$$\ddot{x} = -\alpha^2 x - 2\alpha\dot{x} \quad (A7.5)$$

に代入し，整理すると，

$$\ddot{\phi}e^{-\alpha t} = 0$$

となる．これは， $e^{-\alpha t} \neq 0$ より，

$$\ddot{\phi} = 0$$

に帰着する．これを2回積分すると， ϕ が，

$$\phi = C_1 + C_2 t$$

のように求まる．ここで C_1, C_2 は積分定数である．よって，(A7.5) の一般解は，

$$x = (C_1 + C_2 t)e^{-\alpha t}$$

となる．

問題 7.3

(7.22) 式を時間微分して 0 とおくことによって，変位 x が最大となる時刻を求める．

$$\dot{x} = Ae^{-\alpha t} [-\alpha \sin(\omega_d t + \delta) + \omega_d \cos(\omega_d t + \delta)] = 0$$

これから，

$$\tan(\omega_d t + \delta) = \frac{\omega_d}{\alpha}$$

となる．便宜上，定数である右边を，

$$\tan \theta = \frac{\omega_d}{\alpha}$$

とおく．減衰振動の場合 $\omega_0 > \alpha$ であるから，これを満たす θ は $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ の範囲に存在する．

$$\tan(\omega_d t + \delta) = \tan \theta$$

$$\sin(\omega_d t + \delta) \cos \theta = \sin \theta \cos(\omega_d t + \delta)$$

$$\sin(\omega_d t + \delta - \theta) = 0$$

これは n を整数として，

$$\omega_d t + \delta - \theta = \pi n$$

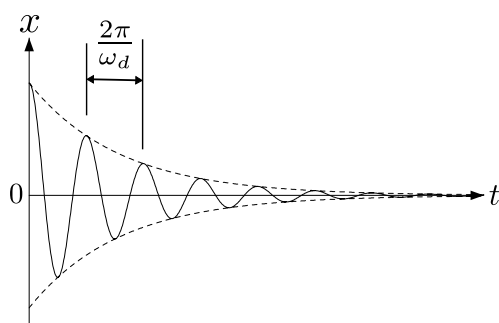
の時，従って，

$$t = \frac{\theta - \delta + \pi n}{\omega_d}$$

の時，満足される．

n が2つ違う t が隣り合わせの最大変位 (1つの正の最大変位と次の正の最大変位) の時刻を考えると，その間の時間 Δt は

$$\Delta t = \frac{2\pi}{\omega_d}$$



で一定となる.

問題 7.4

[1]

$$x = e^{-\alpha t} (C_1 \cos \omega_d t + C_2 \sin \omega_d t) \quad (7.15)$$

を時間微分する.

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \frac{d}{dt} (e^{-\alpha t}) \cdot (C_1 \cos \omega_d t + C_2 \sin \omega_d t) + e^{-\alpha t} \cdot \frac{d}{dt} (C_1 \cos \omega_d t + C_2 \sin \omega_d t) \\ &= -\alpha e^{-\alpha t} (C_1 \cos \omega_d t + C_2 \sin \omega_d t) + e^{-\alpha t} (-\omega_d C_1 \sin \omega_d t + \omega_d C_2 \cos \omega_d t) \\ \therefore \dot{x} &= e^{-\alpha t} [(-\alpha C_1 + \omega_d C_2) \cos \omega_d t + (-\alpha C_2 - \omega_d C_1) \sin \omega_d t] \end{aligned} \quad (A7.6)$$

(7.15), (A7.6) 初期条件を適用すると,

$$A = C_1,$$

$$v_0 = -\alpha C_1 + \omega_d C_2,$$

が得られる. これより任意定数は,

$$C_1 = A,$$

$$C_2 = \frac{\alpha A + v_0}{\omega_d},$$

と定まる. 従って, 与えられた初期条件を満足する解は,

$$x = e^{-\alpha t} \left(A \cos \omega_d t + \frac{\alpha A + v_0}{\omega_d} \sin \omega_d t \right), \quad (A7.7)$$

である.

[2] 極限の公式,

$$\lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{\sin \theta}{\theta} = 1 \quad (7.23)$$

を用いる.

解 (A7.7) を, この公式を適用しやすい形に変形する.

$$x = e^{-\alpha t} \left[A \cos \omega_d t + (\alpha A + v_0) \cdot \frac{\sin \omega_d t}{\omega_d t} \cdot t \right],$$

ここで, 分母は sine 関数の引数 $\omega_d t$ と同じ形とする. その際, t が余るので, 掛けておく.

$\omega_0 \rightarrow \alpha$ の極限, 即ち, $\omega_d \rightarrow 0$ の極限をとる.

$$\begin{aligned} \lim_{\omega_d \rightarrow 0} x &= e^{-\alpha t} \left(A \lim_{\omega_d \rightarrow 0} \cos \omega_d t + (\alpha A + v_0) \lim_{\omega_d \rightarrow 0} \frac{\sin \omega_d t}{\omega_d t} \cdot t \right) \\ &= e^{-\alpha t} [A + (\alpha A + v_0)t] \end{aligned} \quad (A7.8)$$

これは、臨界減衰の一般解 (7.20) に、 $t = 0$ で $x = A$, $\dot{x} = v_0$ なる初期条件を適用した解となっている。

[3]

$$x = e^{-\alpha t} (C_1 e^{\beta t} + C_2 e^{-\beta t}) \quad (7.18)$$

を時間微分する。

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \frac{d}{dt} (e^{-\alpha t}) \cdot (C_1 e^{\beta t} + C_2 e^{-\beta t}) + e^{-\alpha t} \cdot \frac{d}{dt} (C_1 e^{\beta t} + C_2 e^{-\beta t}) \\ &= -\alpha e^{-\alpha t} (C_1 e^{\beta t} + C_2 e^{-\beta t}) + e^{-\alpha t} (\beta C_1 e^{\beta t} - \beta C_2 e^{-\beta t}) \\ \therefore \dot{x} &= e^{-\alpha t} [(-\alpha + \beta)C_1 e^{\beta t} + (-\alpha - \beta)C_2 e^{-\beta t}] \end{aligned} \quad (A7.9)$$

(7.18), (A7.9) に初期条件を適用すると、

$$A = C_1 + C_2,$$

$$v_0 = (-\alpha + \beta)C_1 + (-\alpha - \beta)C_2,$$

が得られる。これより任意定数は、

$$C_1 = \frac{(\alpha + \beta)A + v_0}{2\beta},$$

$$C_2 = -\frac{(\alpha - \beta)A + v_0}{2\beta},$$

と定まる。従って、与えられた初期条件を満足する解は、

$$x = e^{-\alpha t} \left[\frac{(\alpha + \beta)A + v_0}{2\beta} e^{\beta t} - \frac{(\alpha - \beta)A + v_0}{2\beta} e^{-\beta t} \right], \quad (A7.10)$$

である。

[4]

極限の公式、

$$\lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{e^\theta - 1}{\theta} = 1 \quad (7.24)$$

を用いる。

解 (A7.10) を、この公式を適用しやすい形に変形する。

$$\begin{aligned} x &= e^{-\alpha t} \left[A \frac{e^{\beta t} + e^{-\beta t}}{2} + (\alpha A + v_0) \frac{e^{\beta t} - e^{-\beta t}}{2\beta} \right] \\ &= e^{-\alpha t} \left[A \frac{e^{\beta t} + e^{-\beta t}}{2} + (\alpha A + v_0) e^{-\beta t} \cdot \frac{e^{2\beta t} - 1}{2\beta t} \cdot t \right] \end{aligned}$$

ここで、第 2 項の分母は、指数関数の引数 $2\beta t$ と同じ形とする。その際、 t が余るので、掛けておく。

$\omega_0 \rightarrow \alpha$ の極限, 即ち, $\beta \rightarrow 0$ の極限をとる.

$$\begin{aligned}\lim_{\beta \rightarrow 0} x &= e^{-\alpha t} \left[A \lim_{\beta \rightarrow 0} \frac{e^{\beta t} + e^{-\beta t}}{2} + (\alpha A + v_0) \lim_{\beta \rightarrow 0} e^{-\beta t} \cdot \frac{e^{2\beta t} - 1}{2\beta t} \cdot t \right] \\ &= e^{-\alpha t} [A + (\alpha A + v_0)t]\end{aligned}$$

これは, (A7.8) と同じで, 臨界減衰の一般解 (7.20) に, 与えられた 初期条件を適用した解となっている.