

7.4 抵抗のない強制振動

問題 7.5

[1] 方程式 (7.34) の特解として、外力と同じ関数形を持つ、

$$x = A \sin \omega t$$

なる形を仮定する。この時、

$$\ddot{x} = -\omega^2 A \sin \omega t$$

である。これを (7.34) に代入して整理すると、以下の恒等式が得られる。

$$[(\omega_0^2 - \omega^2)A - f_0] \sin \omega t = 0.$$

これが任意の実数 t について成り立つためには、

$$(\omega_0^2 - \omega^2)A - f_0 = 0,$$

が成り立たなければならない。 $\omega \neq \omega_0$ の場合、これを解くと、係数 A が、

$$A = \frac{f_0}{\omega_0^2 - \omega^2},$$

と求まる。従って、(7.34) の特解は、

$$x = \frac{f_0}{\omega_0^2 - \omega^2} \sin \omega t \quad (\text{A7.11})$$

となる。

(7.34) の同次方程式 (7.4) の一般解は、

$$x = C_1 \cos \omega_0 t + C_2 \sin \omega_0 t \quad (7.5)$$

である。従って、(7.34) の一般解は、問 [1] で求めた特解 (A7.11) と同次方程式の一般解 (7.5) との和として、

$$x = C_1 \cos \omega_0 t + C_2 \sin \omega_0 t + \frac{f_0}{\omega_0^2 - \omega^2} \sin \omega t \quad (\text{A7.12})$$

と書き表される。

[2] (A7.12) を時間微分し、速度を求めると、

$$\dot{x} = -\omega_0 C_1 \sin \omega_0 t + \omega_0 C_2 \cos \omega_0 t + \frac{\omega f_0}{\omega_0^2 - \omega^2} \cos \omega t \quad (\text{A7.13})$$

となる。(A7.12), (A7.13) に初期条件 $t = 0$ で $x = 0$, $\dot{x} = -\frac{f_0}{\omega_0 + \omega}$ を適用すると、

$$0 = C_1,$$

$$-\frac{f_0}{\omega_0 + \omega} = \omega_0 C_2 + \frac{\omega f_0}{\omega_0^2 - \omega^2}$$

となる。これより、任意定数が、

$$C_1 = 0, \quad C_2 = -\frac{f_0}{\omega_0^2 - \omega^2}$$

と決まる。従って、与えられた初期条件を満たす解は、

$$x = \frac{f_0}{\omega_0^2 - \omega^2} (\sin \omega t - \sin \omega_0 t) \quad (\text{A7.14})$$

である。

問題 7.6

[1] 便宜上、

$$\varepsilon = \omega - \omega_0$$

とおくと、(A7.14) は以下の形に書き表される。

$$x = -\frac{f_0}{(2\omega_0 + \varepsilon)\varepsilon} [\sin(\omega_0 + \varepsilon)t - \sin \omega_0 t]$$

これを順次、変形していく。

$$\begin{aligned} x &= -\frac{2f_0}{(2\omega_0 + \varepsilon)\varepsilon} \cos \left[\left(\omega_0 + \frac{\varepsilon}{2} \right) t \right] \cdot \sin \left(\frac{\varepsilon}{2} t \right) \\ &= -\frac{f_0}{2\omega_0 + \varepsilon} t \cos \left[\left(\omega_0 + \frac{\varepsilon}{2} \right) t \right] \cdot \frac{\sin \left(\frac{\varepsilon}{2} t \right)}{\frac{\varepsilon}{2} t} \end{aligned} \quad (\text{A7.15})$$

ここで、 $\varepsilon \rightarrow 0$ の極限をとると、

$$x = -\frac{f_0}{2\omega_0} t \cos \omega_0 t$$

となる。これが共鳴 $\omega \rightarrow \omega_0$ の場合の解の形を与える。

[2] 外力の角振動数が固有角振動数に近い場合、即ち、 $\varepsilon \sim 0$ の場合にうなりは起こる。この場合、

$$2\omega_0 + \varepsilon \sim 2\omega_0,$$

$$\cos \left[\left(\omega_0 + \frac{\varepsilon}{2} \right) t \right] \sim \cos \omega_0 t$$

と近似できるから、(A7.15) は、

$$x = -\frac{f_0}{\omega_0 \varepsilon} \cos \omega_0 t \cdot \sin \left(\frac{\varepsilon}{2} t \right)$$

と近似される。これがうなり $\omega \sim \omega_0$ の場合の解の形を与える。