

7.5 抵抗のある強制振動

問題 7.7

特解として,

$$x = A \sin \omega t + B \cos \omega t \quad (\text{A7.16})$$

なる形を仮定する. ここで A, B は未知の定数である. これを (7.49) に代入し, 整理すると,

$$[(\omega_0^2 - \omega^2)A - 2\alpha\omega B - f_0] \sin \omega t + [2\alpha\omega A + (\omega_0^2 - \omega^2)B] \cos \omega t = 0$$

となる. これが任意の実数 t に対して成り立つためには,

$$(\omega_0^2 - \omega^2)A - 2\alpha\omega B - f_0 = 0,$$

$$2\alpha\omega A + (\omega_0^2 - \omega^2)B = 0,$$

が成り立たなければならない. これを解くと, 係数 A, B が,

$$A = \frac{f_0(\omega_0^2 - \omega^2)}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\alpha^2\omega^2}, \quad B = -\frac{2f_0\alpha\omega}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\alpha^2\omega^2}$$

と求まる. 従って, 非同次方程式 (7.49) の特解は,

$$x = \frac{f_0(\omega_0^2 - \omega^2)}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\alpha^2\omega^2} \sin \omega t - \frac{2f_0\alpha\omega}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\alpha^2\omega^2} \cos \omega t \quad (\text{A7.17})$$

となる.

特解 (A7.16) を,

$$x = R \sin(\omega t - \phi) \quad (\text{A7.18})$$

なる形に書き換える. (A7.18) を展開すると,

$$x = R \cos \phi \sin \omega t - R \sin \phi \cos \omega t$$

となるから,

$$A = R \cos \phi, \quad B = -R \sin \phi$$

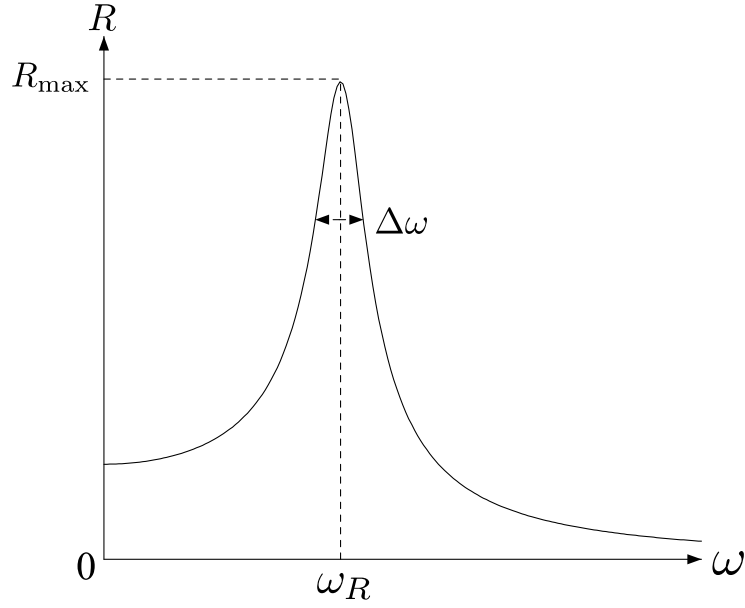
なる関係となる. 即ち,

$$R \cos \phi = \frac{f_0(\omega_0^2 - \omega^2)}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\alpha^2\omega^2}, \quad R \sin \phi = \frac{2f_0\alpha\omega}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\alpha^2\omega^2},$$

である. 従って, R, ϕ の表式は以下で与えられる.

$$R = \frac{f_0}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\alpha^2\omega^2}}, \quad (\text{A7.19})$$

$$\phi = \tan^{-1} \left(\frac{2\alpha\omega}{\omega_0^2 - \omega^2} \right). \quad (\text{A7.20})$$



問題 7.8

(7.45a) の分母の根号の中,

$$F = (\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\alpha^2\omega^2$$

が最小の時, (7.45a) は最大となる. 便宜上, $y = \omega^2$ とおくと,

$$F = (y - \omega_0^2)^2 + 4\alpha^2 y$$

は y について 2 次関数となり,

$$F = [y - (\omega_0^2 - 2\alpha^2)]^2 + 4\alpha^2(\omega_0^2 - \alpha^2)$$

と整理できることから, F は, $y = \omega^2 = \omega_0^2 - 2\alpha^2$ の時最小となり, 最小値 $F_{\min}$ は, $F_{\min} = 4\alpha^2(\omega_0^2 - \alpha^2)$ となる.

従って, 共鳴点の ω は,

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - 2\alpha^2} \quad (7.46)$$

で, この時の振幅 $R_{\max}$ は,

$$R_{\max} = \frac{f_0}{2\alpha\sqrt{\omega_0^2 - \alpha^2}} \quad (7.47)$$

となる.

問題 7.9

[1] 振幅 R が $\frac{R_{\max}}{\sqrt{2}}$ となる外力の角振動数 ω を求める. 問題 3-5 の (A7.19) を $\frac{R_{\max}}{\sqrt{2}}$ と等しいとおくと, (7.47) を適用して,

$$\frac{f_0}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\alpha^2\omega^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{f_0}{2\alpha\sqrt{\omega_0^2 - \alpha^2}}$$

となる。これより、

$$(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\alpha^2\omega^2 = 8\alpha^2(\omega_0^2 - \alpha^2)$$

$$(\omega^2 - \omega_0^2)^2 + 4\alpha^2(\omega^2 - \omega_0^2) - 4\alpha^2(\omega_0^2 - 2\alpha^2) = 0$$

が得られる。これを $\omega^2 - \omega_0^2$ に関する 2 次方程式として、その解を求めると、

$$\omega^2 = \omega_0^2 - 2\alpha^2 \pm 2\alpha\sqrt{\omega_0^2 - \alpha^2}$$

ここで、共鳴点の角振動数 (7.46) を用いると、

$$\omega^2 = \omega_R^2 \pm 2\alpha\sqrt{\omega_0^2 - \alpha^2}$$

$$(\omega + \omega_R)(\omega - \omega_R) = \pm 2\alpha\sqrt{\omega_0^2 - \alpha^2}$$

と表される。 α が小さい場合、

$$\omega + \omega_R \sim 2\omega_R \sim 2\omega_0$$

$$\omega_0^2 - \alpha^2 \sim \omega_0^2$$

と近似できるから、上式は、

$$2\omega_0(\omega - \omega_R) \sim \pm 2\alpha\omega_0$$

$$\therefore \omega - \omega_R \sim \pm\alpha$$

と近似される。共鳴曲線の幅 $\Delta\omega$ は、この式で与えられる 2 つの ω , $\omega_R + \alpha$ と $\omega_R - \alpha$ の差で定義されるから、

$$\Delta\omega \sim 2\alpha \tag{7.48}$$

と近似される。

[2] (7.48) を Q 値の定義 (7.50) に適用する。

$$Q \sim \frac{\omega_R}{\Delta\omega}$$

ここで、 α が小さい場合、 $\omega_R \sim \omega_0$ と近似されるから、この場合、

$$Q \sim \frac{\omega_0}{\Delta\omega} \tag{7.51}$$

と近似される。