

第0章 数学的準備

0.1 ベクトル

0.1.4 スカラー積・ベクトル積

問題 0.1

ベクトル $\mathbf{A} - \mathbf{B}$ を成分で表すと,

$$\mathbf{A} - \mathbf{B} = (A_x - B_x, A_y - B_y, A_z - B_z)$$

となるから, その大きさ (絶対値) の 2 乗は,

$$|\mathbf{A} - \mathbf{B}|^2 = (A_x - B_x)^2 + (A_y - B_y)^2 + (A_z - B_z)^2$$

となる. 上式と, A, B を成分で与える式を (0.6) に代入すると,

$$(A_x - B_x)^2 + (A_y - B_y)^2 + (A_z - B_z)^2 = (A_x^2 + A_y^2 + A_z^2) + (B_x^2 + B_y^2 + B_z^2) - 2AB \cos \theta$$

が得られる. 左辺を展開し, 整理する.

$$(A_x^2 - 2A_x B_x + B_x^2) + (A_y^2 - 2A_y B_y + B_y^2) + (A_z^2 - 2A_z B_z + B_z^2)$$

$$= (A_x^2 + A_y^2 + A_z^2) + (B_x^2 + B_y^2 + B_z^2) - 2AB \cos \theta,$$

$$-2A_x B_x - 2A_y B_y - 2A_z B_z = -2AB \cos \theta.$$

従って,

$$AB \cos \theta = A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z$$

となる.

問題 0.2

求めるベクトルを $\mathbf{e} = (e_x, e_y, e_z)$ とおくと, $\mathbf{e}$ は $\mathbf{A}, \mathbf{B}$ と垂直であるから, それらのベクトルとのスカラー積は 0 となり, 下式が成り立つ.

$$\mathbf{e} \cdot \mathbf{A} = e_x - e_y + e_z = 0 \quad (\text{A0.1a})$$

$$\mathbf{e} \cdot \mathbf{B} = 2e_x + 3e_y - e_z = 0 \quad (\text{A0.1b})$$

又, $\mathbf{e}$ は単位ベクトルであるから, その大きさは 1 で,

$$e_x^2 + e_y^2 + e_z^2 = 1 \quad (\text{A0.2})$$

となる. (A0.1a)+(A0.1b) より e_z を消去すると,

$$e_y = -\frac{3}{2}e_x \quad (\text{A0.3})$$

が得られる. (A0.3) を (A0.1a) に代入すると,

$$e_z = -\frac{5}{2}e_x \quad (\text{A0.4})$$

が得られる. (A0.3), (A0.4) を (A0.2) に代入する.

$$e_x^2 \left(1 + \frac{9}{4} + \frac{25}{4} \right) = 1$$

これより,

$$e_x^2 = \frac{4}{38}$$

従って,

$$e_x = \pm \frac{2}{\sqrt{38}}$$

が得られる. これを (A0.3), (A0.4) に代入するすると,

$$e_y = \mp \frac{3}{\sqrt{38}}, \quad e_z = \mp \frac{5}{\sqrt{38}} \quad (\text{複号同順})$$

が得られる. 従って, 求めるベクトルは,

$$\mathbf{e} = \pm \left(\frac{2}{\sqrt{38}}, -\frac{3}{\sqrt{38}}, -\frac{5}{\sqrt{38}} \right)$$

となる.

問題 0.3

(0.9) 式に従って, ベクトル $\mathbf{A}$ とベクトル $\mathbf{B}$ のベクトル積を計算する.

$$\mathbf{A} \times \mathbf{B} = ((-1) \times (-1) - 1 \times 3, 1 \times 2 - 1 \times (-1), 1 \times 3 - (-1) \times 2) = (-2, 3, 5)$$

ベクトル積の性質より, これは $\mathbf{A}$ と $\mathbf{B}$ の両方に垂直なベクトルである. よって, 求めるベクトル $\mathbf{C}$ は $\mathbf{A} \times \mathbf{B}$ に比例し,

$$\mathbf{C} = (-2t, 3t, 5t)$$

とおくことができる. ここで実数 t は比例係数である. $\mathbf{C}$ が単位ベクトルであるためには, その大きさが 1, 即ち,

$$|\mathbf{C}| = \sqrt{(-2t)^2 + (3t)^2 + (5t)^2} = \sqrt{38t^2} = 1$$

でなければならない. よって,

$$t^2 = \frac{1}{38},$$

$$t = \pm \frac{1}{\sqrt{38}},$$

となる. 従って, 求める単位ベクトルは,

$$\mathbf{C} = \left(\mp \frac{2}{\sqrt{38}}, \pm \frac{3}{\sqrt{38}}, \pm \frac{5}{\sqrt{38}} \right) \quad (\text{複号同順})$$

である.