

0.1.8 ベクトルの微分

問題 0.9

(0.15a) の導出

スカラー関数 f の, 変数が $t + \Delta t$ における値と変数が t における値の差を Δf , ベクトル関数 $\mathbf{A}$ の, 変数が $t + \Delta t$ における値と変数が t における値の差のベクトルを $\Delta \mathbf{A}$ とすると,

$$f(t + \Delta t) = f(t) + \Delta f,$$

$$\mathbf{A}(t + \Delta t) = \mathbf{A}(t) + \Delta \mathbf{A},$$

である. よって, f と $\mathbf{A}$ の積 $f\mathbf{A}$ の, 変数が $t + \Delta t$ における値と変数が t における値の差は,

$$\begin{aligned} f(t + \Delta t)\mathbf{A}(t + \Delta t) - f(t)\mathbf{A}(t) &= (f(t) + \Delta f)(\mathbf{A}(t) + \Delta \mathbf{A}) - f(t)\mathbf{A}(t) \\ &= \Delta f\mathbf{A}(t) + f(t)\Delta \mathbf{A} + \Delta f\Delta \mathbf{A} \end{aligned}$$

となる. 両辺を Δt で割る.

$$\frac{f(t + \Delta t)\mathbf{A}(t + \Delta t) - f(t)\mathbf{A}(t)}{\Delta t} = \frac{\Delta f}{\Delta t}\mathbf{A}(t) + f(t)\frac{\Delta \mathbf{A}}{\Delta t} + \frac{\Delta f}{\Delta t}\frac{\Delta \mathbf{A}}{\Delta t}\Delta t$$

ここで $\Delta t \rightarrow 0$ の極限をとると, 右辺の最後の項は Δt に比例するから 0 に収束して, (0.15a) に帰着する.

(0.15c) の導出

変数が $t + \Delta t$ におけるベクトル積と変数が t におけるベクトル積の差を考える.

$$\begin{aligned} \mathbf{A}(t + \Delta t) \times \mathbf{B}(t + \Delta t) - \mathbf{A}(t) \times \mathbf{B}(t) &= (\mathbf{A}(t) + \Delta \mathbf{A}) \times (\mathbf{B}(t) + \Delta \mathbf{B}) - \mathbf{A}(t) \times \mathbf{B}(t) \\ &= \Delta \mathbf{A} \times \mathbf{B}(t) + \mathbf{A}(t) \times \Delta \mathbf{B} + \Delta \mathbf{A} \times \Delta \mathbf{B} \end{aligned}$$

両辺を Δt で割る.

$$\frac{\mathbf{A}(t + \Delta t) \times \mathbf{B}(t + \Delta t) - \mathbf{A}(t) \times \mathbf{B}(t)}{\Delta t} = \frac{\Delta \mathbf{A}}{\Delta t} \times \mathbf{B}(t) + \mathbf{A}(t) \times \frac{\Delta \mathbf{B}}{\Delta t} + \frac{\Delta \mathbf{A}}{\Delta t} \times \frac{\Delta \mathbf{B}}{\Delta t}\Delta t$$

ここで $\Delta t \rightarrow 0$ の極限をとると, 右辺の最後の項は Δt に比例するから 0 に収束して, (0.15c) に帰着する.

問題 0.10

ベクトル $\mathbf{A}$ の大きさを A とおくと, 大きさの 2 乗はスカラー積を用いて,

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{A} = A^2$$

と表される. この両辺を微分する. 左辺については公式 (0.15b) を適用する. 右辺は定数の微分であるから 0 である.

$$\frac{d\mathbf{A}}{dt} \cdot \mathbf{A} + \mathbf{A} \cdot \frac{d\mathbf{A}}{dt} = 0$$

$$\mathbf{A} \cdot \frac{d\mathbf{A}}{dt} = 0$$

これは ベクトル $\mathbf{A}$ とその微分 $\frac{d\mathbf{A}}{dt}$ が垂直であることを意味する.

問題 0.11

公式 (0.15c) より,

$$\frac{d}{dt} \left(\mathbf{r} \times \frac{d\mathbf{r}}{dt} \right) = \frac{d\mathbf{r}}{dt} \times \frac{d\mathbf{r}}{dt} + \mathbf{r} \times \frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2}$$

である. ところで, 同一のベクトルどうしのベクトル積は, それらの間のなす角が 0 であることにより, ゼロベクトル, 即ち,

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt} \times \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \mathbf{0}$$

となる. 従って,

$$\frac{d}{dt} \left(\mathbf{r} \times \frac{d\mathbf{r}}{dt} \right) = \mathbf{r} \times \frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2}$$

となる.