

第 13 回授業

第 7 章 振動論 — 7.3 減衰振動

[1] 運動方程式

[2] 定数係数の 2 階常微分方程式の解法

[3] 解（運動の形態）の分類

(1) 減衰振動

(2) 過減衰

(3) 臨界減衰

[4] 減衰振動子のエネルギー

【付録】

- ・ 解の重ね合わせ
- ・ 一般解の導出

最終更新日: 2025/5/28

減衰振動の運動方程式

x 軸上を質点が、変位に比例した復元力 $-kx$ ($k > 0$) の他に、速度に比例した抵抗 $-\gamma\dot{x}$ ($\gamma > 0$) を受けて運動する。運動方程式は、

$$m\ddot{x} = -kx - \gamma\dot{x}$$

となる。これを質量 m で割り、定数、

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}, \quad \alpha = \frac{\gamma}{2m}$$

を用いて書き換える。

$$\ddot{x} = -\omega_0^2 x - 2\alpha\dot{x} \tag{7.11}$$

ω_0 は固有角振動数（抵抗がない場合の単振動の角振動数）、 α は減衰定数である。

定数係数の2階常微分方程式の解法

定数係数の2階常微分方程式,

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\omega_0^2 x - 2\alpha \frac{dx}{dt} \quad (7.11)$$

の解を求める.

この方程式の**特解**として, $x = e^{\lambda t}$ なる形を仮定する. これを (7.11) に代入した結果は,

$$(\lambda^2 + 2\alpha\lambda + \omega_0^2)e^{\lambda t} = 0$$

となる. $e^{\lambda t} \neq 0$ より, λ についての2次方程式 (**特性方程式**) が得られる.

$$\lambda^2 + 2\alpha\lambda + \omega_0^2 = 0$$

特性方程式の解は,

$$\lambda = -\alpha \pm \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2} \quad (7.12)$$

となる.

特性方程式の解の分類

特性方程式の解,

$$\lambda = -\alpha \pm \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2} \quad (7.12)$$

は, 判別式 $\alpha^2 - \omega_0^2$ の符号に応じて, 3 つに分類される.

(i) $\omega_0 > \alpha$ の場合

(7.12) の根号の中は負であるから, 解は複素数となる. この解は, 虚数単位 $i = \sqrt{-1}$ を用いて, 以下の形に表される.

$$\lambda = -\alpha \pm i\sqrt{\omega_0^2 - \alpha^2} \quad (7.13)$$

この場合の運動は, 減衰振動と呼ばれる.

(ii) $\alpha > \omega_0$ の場合

(7.12) の根号の中は正であるから, 解は, 異なる 2 つの実数解となる.
この場合の運動は, 過減衰と呼ばれる.

(iii) $\alpha = \omega_0$ の場合

(7.12) の根号の中は 0 であるから, 解は, 1 つの実数解 (重解) $\lambda = -\alpha$ となる.

この場合の運動は, 臨界減衰と呼ばれる.

減衰振動の一般解

$\omega_0 > \alpha$ の場合 (減衰振動) を考える.

便宜上, 角振動数の次元を持つ定数,

$$\omega_d = \sqrt{\omega_0^2 - \alpha^2} \quad (7.14)$$

を導入すると, 特性方程式の解は,

$$\lambda = -\alpha \pm i\omega_d$$

とおける. 従って, 特解は, $e^{(-\alpha+i\omega_d)t}$ と $e^{(-\alpha-i\omega_d)t}$ の 2 個となる.

一般解は, C'_1, C'_2 を任意定数として,

$$x = e^{-\alpha t} (C'_1 e^{i\omega_d t} + C'_2 e^{-i\omega_d t})$$

と表される (解の重ね合わせ). オイラーの公式を適用する.

$$\begin{aligned} x &= e^{-\alpha t} [C'_1 (\cos \omega_d t + i \sin \omega_d t) + C'_2 (\cos \omega_d t - i \sin \omega_d t)] \\ &= e^{-\alpha t} [(C'_1 + C'_2) \cos \omega_d t + i(C'_1 - C'_2) \sin \omega_d t] \end{aligned}$$

任意定数を, $C_1 = C'_1 + C'_2$, $C_2 = i(C'_1 - C'_2)$ と置き換えると, 一般解は以下の形となる.

$$x = e^{-\alpha t} (C_1 \cos \omega_d t + C_2 \sin \omega_d t) \quad (7.15)$$

となる.

減衰振動：初期条件を満足する解

解の性質を考察しやすいよう、特定の初期条件を満たす解を求める。

(7.15) を時間微分する。

$$\dot{x} = e^{-\alpha t} [(-\alpha C_1 + \omega_d C_2) \cos \omega_d t - (\alpha C_2 + \omega_d C_1) \sin \omega_d t] \quad (\text{S1})$$

$t = 0$ で $x = A$, $\dot{x} = 0$ なる初期条件を適用する。(7.15), (S1) に $t = 0$ を代入すると、左辺はそれぞれ A , 0 であるから、

$$A = C_1,$$

$$0 = -\alpha C_1 + \omega_d C_2,$$

となる。よって、

$$C_1 = A, \quad C_2 = \frac{\alpha}{\omega_d} A$$

と定まる。従って、この初期条件を満足する解は、

$$x = A e^{-\alpha t} \left(\cos \omega_d t + \frac{\alpha}{\omega_d} \sin \omega_d t \right) \quad (7.16)$$

である。この解に対応する速度は、

$$\dot{x} = -\frac{\omega_0^2}{\omega_d} A e^{-\alpha t} \sin \omega_d t$$

となる。

減衰振動の解の性質

減衰振動の解

$$x = Ae^{-\alpha t} \left(\cos \omega_d t + \frac{\alpha}{\omega_d} \sin \omega_d t \right) \quad (7.16)$$

の性質について考察する。

速度が 0 となる、即ち、変位が極値をとる時刻は、

$$\omega_d t = \pi n \quad (n = 0, 1, 2, \dots)$$

を満足する。この時刻では、変位は、

$$x = \pm Ae^{-\alpha t}$$

となる。この変位が極大となる点、あるいは、極小となる点を結んだ曲線（包絡線）を、図に点線で示す。

この解は、周期 $T_d = \frac{2\pi}{\omega_d}$ で振動を繰り返しながら、振幅が $e^{-\alpha t}$ に従って指数関数的に減衰するという特徴を持つ。このような振動を、減衰振動と呼ぶ。

αT_d は 1 周期あたりの振幅の減少率を無次元数として表したもので、対数減衰率と呼ばれる。

復元力と比べて、抵抗力の影響が小さいため、振動的な運動が起こる。

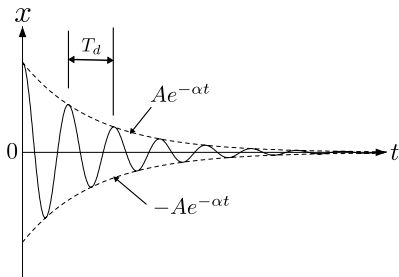


図. 減衰振動の場合の変位の時間依存性.

過減衰の一般解

$\alpha > \omega_0$ の場合（過減衰）を考える。

便宜上、定数、

$$\beta = \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2} \quad (7.17)$$

を導入すると、特性方程式の解は、

$$\lambda = -\alpha \pm \beta$$

とおける。従って、特解は、 $e^{(-\alpha+\beta)t}$ と $e^{(-\alpha-\beta)t}$ の 2 個となる。

一般解は、 C_1, C_2 を任意定数として、

$$x = e^{-\alpha t} (C_1 e^{\beta t} + C_2 e^{-\beta t}) \quad (7.18)$$

と表される。

※ β は実数なので、オイラーの公式を適用するような、これ以上の変形は必要ない。

過減衰：初期条件を満足する解

解の性質を考察しやすいよう、特定の初期条件を満たす解を求める。

(7.18) を時間微分する。

$$\dot{x} = e^{-\alpha t} [(-\alpha + \beta) C_1 e^{\beta t} - (\alpha + \beta) C_2 e^{-\beta t}] \quad (S2)$$

$t = 0$ で $x = A$, $\dot{x} = 0$ なる初期条件を適用する。(7.18), (S2) に $t = 0$ を代入すると、左辺はそれぞれ A , 0 であるから、

$$A = C_1 + C_2,$$

$$0 = (-\alpha + \beta)C_1 - (\alpha + \beta)C_2,$$

となる。よって、

$$C_1 = \frac{\alpha + \beta}{2\beta} A, \quad C_2 = -\frac{\alpha - \beta}{2\beta} A,$$

と定まる。従って、この初期条件を満足する解は、

$$x = Ae^{-\alpha t} \left(\frac{\alpha + \beta}{2\beta} e^{\beta t} - \frac{\alpha - \beta}{2\beta} e^{-\beta t} \right) \quad (7.19)$$

である。

過減衰の解の性質

過減衰の解,

$$x = Ae^{-\alpha t} \left(\frac{\alpha + \beta}{2\beta} e^{\beta t} - \frac{\alpha - \beta}{2\beta} e^{-\beta t} \right) \quad (7.19)$$

の性質について考察する.

この解に対応する速度は,

$$\dot{x} = -\frac{(\alpha + \beta)(\alpha - \beta)}{2\beta} Ae^{-\alpha t} (e^{\beta t} - e^{-\beta t})$$

である.

常に $\dot{x} < 0$ であるから, **単調減少で, 振動することはない**. 又, $t \rightarrow \infty$ で $x \rightarrow 0$ である.

このような運動を**過減衰**と呼ぶ. **復元力と比べて, 抵抗力の影響が大きい**ため, 振動は1回も起こらない.

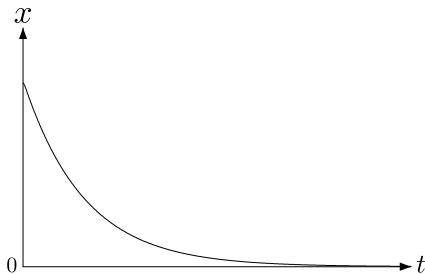


図. 過減衰の場合の変位の時間依存性.

臨界減衰の一般解

$\alpha = \omega_0$ の場合（臨界減衰）を考える.

特性方程式の解は,

$$\lambda = -\alpha$$

で, 重解となる. 特解の 1 つは $e^{-\alpha t}$ である. 2 階の常微分方程式には 1 次独立な特解は 2 個存在するから, もう 1 つ, 特解が存在するはずである.

既知の特解 $e^{-\alpha t}$ からもう 1 つの特解を見つけるため, ϕ を t の関数として, 未知の特解を,

$$x = \phi e^{-\alpha t}$$

なる形におく. この場合,

$$\frac{dx}{dt} = \left(\frac{d\phi}{dt} - \alpha\phi \right) e^{-\alpha t}, \quad \frac{d^2x}{dt^2} = \left(\frac{d^2\phi}{dt^2} - 2\alpha \frac{d\phi}{dt} + \alpha^2\phi \right) e^{-\alpha t},$$

となる. これらを $\omega_0 = \alpha$ の場合の常微分方程式

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\alpha \frac{dx}{dt} + \alpha^2 x = 0$$

に代入し, 整理すると, $e^{-\alpha t} \neq 0$ より,

$$\frac{d^2\phi}{dt^2} = 0$$

に帰着する.

臨界減衰の一般解（続き）

$$\frac{d^2\phi}{dt^2} = 0$$

を2回積分すると、 ϕ が、

$$\phi = C_1 + C_2 t$$

のように求まる。ここで C_1, C_2 は積分定数である。よって、解は、

$$x = (C_1 + C_2 t)e^{-\alpha t} \quad (7.20)$$

なる形となる。従って、既知の特解 $e^{-\alpha t}$ に対して、もう1つの特解は $te^{-\alpha t}$ であることがわかる。従って、 $\omega_0 = \alpha$ の場合の一般解は、(7.20) となる。

臨界減衰：初期条件を満足する解

解の性質を考察しやすいよう、特定の初期条件を満たす解を求める。

(7.20) を時間微分する。

$$\dot{x} = [(C_2 - \alpha C_1) - \alpha C_2 t]e^{-\alpha t} \quad (\text{S3})$$

$t = 0$ で $x = A$, $\dot{x} = 0$ なる初期条件を適用する。 (7.20), (S3) に $t = 0$ を代入すると、左辺はそれぞれ A , 0 であるから、

$$A = C_1, \quad 0 = C_2 - \alpha C_1$$

となる。 よって、

$$C_2 = \alpha A$$

と定まる。 従って、この初期条件を満足する解は、

$$x = A(1 + \alpha t)e^{-\alpha t} \quad (7.21)$$

である。

臨界減衰の解の性質

臨界減衰の解,

$$x = A(1 + \alpha t)e^{-\alpha t} \quad (7.21)$$

の性質について考察する.

この解に対応する速度は,

$$\dot{x} = -\alpha^2 A t e^{-\alpha t}$$

である.

過減衰と同様, 常に $\dot{x} < 0$ であるから, 単調減少で, 振動することはない. 又,

$t \rightarrow \infty$ で $x \rightarrow 0$ であるが, 過減衰の場合より速やかに 0 に近づく. このような運動を臨界減衰と呼ぶ.

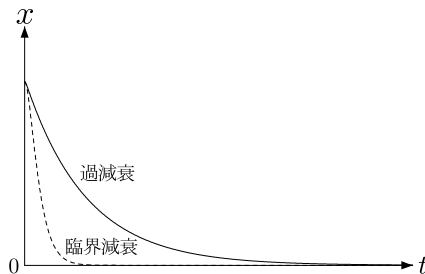


図. 臨界減衰の場合の変位の時間依存性. 比較のため, 過減衰の場合も示す.

減衰振動又は過減衰と臨界減衰の関係

減衰振動の解,

$$x = Ae^{-\alpha t} \left(\cos \omega_d t + \frac{\alpha}{\omega_d} \sin \omega_d t \right), \quad (7.16)$$

に対して, $\omega_0 \rightarrow \alpha$ ($\omega_d \rightarrow 0$) の極限をとると,

又は, 過減衰の解,

$$x = Ae^{-\alpha t} \left(\frac{\alpha + \beta}{2\beta} e^{\beta t} - \frac{\alpha - \beta}{2\beta} e^{-\beta t} \right) \quad (7.19)$$

に対して, $\omega_0 \rightarrow \alpha$ ($\beta \rightarrow 0$) の極限をとると,

臨界減衰の解,

$$x = A(1 + \alpha t)e^{-\alpha t} \quad (7.21)$$

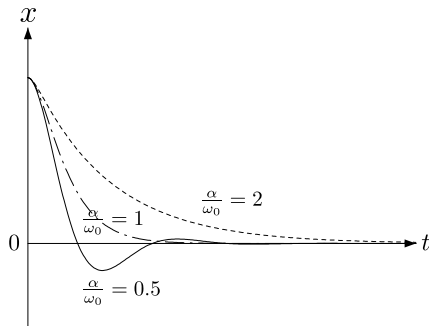
に帰着する (導出は, 問題 7.4) .

臨界減衰は過減衰よりも速く 0 に近づく理由

図は、同じ固有角振動数 ω_0 について、減衰定数 α を、 $\alpha = 0.5\omega_0$ (減衰振動)、 $\alpha = \omega_0$ (臨界減衰)、 $\alpha = 2\omega_0$ (過減衰) と増加させた場合について、変位の時間依存性の違いを示す。臨界減衰は過減衰よりも速く 0 に近づく。又、最初の振動に着目すると、減衰振動は臨界減衰よりも速く 0 に近づく。この理由はどのように説明されるか。

最大変位 $x = A$ から原点 $x = 0$ へ向けて運動する時を考える。復元力 $-m\omega_0^2 x$ のため、原点へ向かう力を受けて運動が始まるが、速度が増すに従い、抵抗力 $-2m\alpha \dot{x}$ が増加するので、原点へ向かう運動がしだいに減速される。

原点に近い所では、抵抗力の方が復元力より大きくなるり、原点とは逆向きに力を受けるように変わる。減衰振動、臨界減衰、過減衰へと運動の形態が変わるに従い、減衰定数は大きくなり、抵抗力が大きくなるので、原点へ向かう運動がより大きく減速されるようになる。これが上記の問いに対する答えである。



実線は $\alpha = 0.5\omega_0$ (減衰振動)、一点鎖線は $\alpha = \omega_0$ (臨界減衰)、点線は $\alpha = 2\omega_0$ (過減衰) の場合。