

第7章 振動論 — 7.2 単振動

2025 年度 課題 解答

出題 2025/5/22

[1] 関数 $U(x)$ は極小点 $x = x_m$ の近傍で,

$$U(x) = U(x_m) + U'(x_m)(x - x_m) + \frac{1}{2}U''(x_m)(x - x_m)^2 + \frac{1}{6}U'''(x_m)(x - x_m)^3 + \cdots$$

なる形の Taylor 級数に表すことができる. ここで, $U'(x)$, $U''(x)$, $U'''(x)$ はそれぞれ, $U(x)$ の 1 階, 2 階, 3 階微係数である. $x = x_m$ は極小点であるから, $U'(x_m) = 0$ となる. 又, $x = x_m$ において下に凸であるから, $U''(x_m) > 0$ となる. 従って, $x = x_m$ における微係数が 0 でない最も小さい微分の階数は 2 で, 関数 $U(x)$ は $x = x_m$ の近傍で,

$$U(x) \simeq U(x_m) + \frac{1}{2}U''(x_m)(x - x_m)^2$$

と近似することができる.

この近似したポテンシャルエネルギーに対応する力 $F(x)$ は,

$$F(x) = -\frac{dU(x)}{dx} = -U''(x_m)(x - x_m)$$

となる. その運動方程式は,

$$m\ddot{x} = -U''(x_m)(x - x_m)$$

である. $U''(x_m) > 0$ より, 極小点からの変位 $x - x_m$ に比例した復元力を受ける運動となる. 従って, その運動は $x = x_m$ の近傍では単振動となる.

$k = U''(x_m)$ をバネ定数と考えれば, バネとの類推から, その単振動の角振動数 ω_0 は,

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{U''(x_m)}{m}} \quad (\text{R7.2})$$

となる.

[2] ポテンシャルエネルギーは,

$$U = \lambda \int (e^{-ax} - e^{-2ax})dx = \frac{\lambda}{2a} (e^{-2ax} - 2e^{-ax}) \quad (\text{R5.2})$$

となった. これの 1 回微分, 2 回微分は, それぞれ,

$$U'(x) = -\lambda e^{-ax}(e^{-ax} - 1) \quad (\text{R5.3})$$

$$U''(x) = 2a\lambda e^{-ax} \left(e^{-ax} - \frac{1}{2} \right) \quad (\text{R5.4})$$

となった。極小点 $x = 0$ においては、2 階微係数は、

$$U''(0) = 2a\lambda \left(1 - \frac{1}{2}\right) = a\lambda$$

となる。これを (R7.2) に代入すると、単振動の角振動数は、

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{a\lambda}{m}}$$

となる。

参考のため、(R5.2) 式で表される $U(x)$ の曲線（黒線）と、極小点 $x = 0$ の近傍で 2 次式で近似した近似曲線（赤線）を下図に重ねて示す。

