

第7章 振動論 — 7.2 単振動

2025 年度 課題

出題 2025/5/22

数学的予備知識

x の関数 $f(x)$ が, $x = a$ を含むある範囲内において, 無限階微分可能で, そのすべての階数の微係数が連続であるとする. この場合, 関数 $f(x)$ は,

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{1}{2}f''(a)(x-a)^2 + \frac{1}{6}f'''(a)(x-a)^3 + \cdots$$

なる形の Taylor 級数に表すことができる. ここで, $f'(x)$, $f''(x)$, $f'''(x)$ はそれぞれ, $f(x)$ の 1 階, 2 階, 3 階微係数である. より一般的には, $f^{(n)}(x)$ を $f(x)$ の n 階微係数として,

$$f(x) = f(a) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} f^{(n)}(a)(x-a)^n$$

と表される.

近似式

$x = a$ における微係数が 0 でない最も小さい微分の階数を N とする. この場合, 関数 $f(x)$ は $x = a$ の近くで,

$$f(x) \simeq f(a) + \frac{1}{N!} f^{(N)}(a)(x-a)^N$$

と近似することができる. ここで記号 $\simeq$ は, 右辺が左辺の近似式であることを意味する.

問題

x 軸上を, 質量 m の質点が, x の関数であるポテンシャルエネルギー $U(x)$ をもつ力を受けて運動する. 関数 $U(x)$ は上記の微分可能性, 連続性を満たすと仮定する. 上記の近似式を用いて, 以下の問いに答えよ.

[1] 関数 $U(x)$ が $x = x_m$ において極小となり, かつ, この極小点で下に凸であるとする. この場合, $x = x_m$ 付近の運動は単振動で近似することができる. そのことを示せ. 更に, 単振動の角振動数を, 質量 m と, $x = x_m$ における各階数の微係数のうち, 必要な階数の微係数を用いて求めよ.

[2] 課題 4 の場合, ポテンシャルエネルギーは,

$$U = \frac{\lambda}{2a} (e^{-2ax} - 2e^{-ax}) \quad (\text{R7.1})$$

であった. ここで, λ, a は, 正の定数である. この場合, ポテンシャルエネルギーが極小となる座標,

$$x_m = 0$$

の付近の運動は単振動となる. その角振動数を, 定数 m, λ, a を用いて求めよ. なお, 運動方程式の解を求める必要はない.