

## 第5章 仕事とエネルギー

### 「力が座標の関数の場合のポテンシャルエネルギー」【課題 解答】

出題 2025/5/15

[1] 以下のように計算される.

$$U = \lambda \int (e^{-ax} - e^{-2ax}) dx = \frac{\lambda}{2a} (e^{-2ax} - 2e^{-ax}) \quad (\text{R5.2})$$

[2] まず, ポテンシャルエネルギー (R5.2) の1回微分, 2回微分を計算すると, それぞれ以下ようになる.

$$U'(x) = \lambda(e^{-ax} - e^{-2ax}) = -\lambda e^{-ax}(e^{-ax} - 1) \quad (\text{R5.3})$$

$$U''(x) = a\lambda(-e^{-ax} + 2e^{-2ax}) = 2a\lambda e^{-ax} \left( e^{-ax} - \frac{1}{2} \right) \quad (\text{R5.4})$$

$U'(x) = 0$  の解は,  $e^{-ax} = 1$  より,

$$x = 0$$

である. この座標でのポテンシャルエネルギーの値は,

$$U(0) = \frac{\lambda}{a} \left( -1 + \frac{1}{2} \right) = -\frac{\lambda}{2a}$$

である.  $x < 0$  で,  $e^{-ax} > 1$  より  $U'(x) < 0$  となるから, 単調減少になる.  $x > 0$  で,  $e^{-ax} < 1$  より  $U'(x) > 0$  となるから, 単調増加になる.

$U''(x)$  の解は,  $e^{-ax} = \frac{1}{2}$  より,

$$x = \frac{1}{a} \log 2$$

である. この座標でのポテンシャルエネルギーの値は,

$$U\left(\frac{1}{a} \log 2\right) = \frac{\lambda}{2a} \left[ \left(\frac{1}{2}\right)^2 - 1 \right] = -\frac{3\lambda}{8a}$$

である.  $x < \frac{1}{a} \log 2$  で  $e^{-ax} > \frac{1}{2}$  より  $U''(x) > 0$  となるから, 下に凸になる.  $x > \frac{1}{a} \log 2$  で  $e^{-ax} < \frac{1}{2}$  より  $U''(x) < 0$  となるから, 上に凸になる.

以上より, 増減表は以下ようになる.

| $x$      | $x < 0$ | $x = 0$ | $0 < x < \frac{1}{a} \log 2$ | $x = \frac{1}{a} \log 2$ | $\frac{1}{a} \log 2 < x$ |
|----------|---------|---------|------------------------------|--------------------------|--------------------------|
| $U'(x)$  | —       | 0       | +                            | +                        | +                        |
| $U''(x)$ | +       | +       | +                            | 0                        | —                        |
| $U(x)$   | ↘       | 極小点     | ↗                            | 変曲点                      | ↘                        |

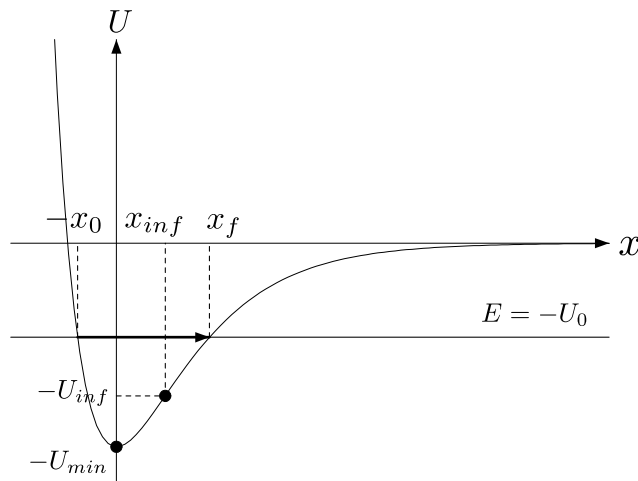
[3]  $U(x)$  の曲線と  $x$  との交点は,

$$U(x) = \frac{\lambda}{2a} e^{-ax} (e^{-ax} - 2) = 0$$

を解くと、 $e^{-ax} = 2$  より、 $x = -\frac{1}{a} \log 2$  となる。

$x \rightarrow -\infty$  で  $U \rightarrow \infty$  となる。  $x \rightarrow \infty$  で  $U \rightarrow 0$  となる。

以上のことを元に、ポテンシャルエネルギーの曲線を作図すると、下図のようになる。図で、 $-U_{min} = -\frac{\lambda}{2a}$  はポテンシャルエネルギーの極小値を、 $x_{inf} = \frac{1}{a} \log 2$  変曲点の座標を、 $-U_{inf} = -\frac{3\lambda}{8a}$  は変曲点でのポテンシャルエネルギーを、 $x_f = -\frac{1}{a} \log(2 - e^{ax_0})$  は運動の起こりうる最大の座標（問 [5] で求めるもの）を示す。又、図の矢印は、運動の起こりうる範囲  $-x_0 \leq x \leq x_f$ （問 [6] で求めるもの）を示す。



[4] 題意より、

$$-\frac{1}{a} \log 2 < -x_0 < 0 \quad (\text{R5.5})$$

を満たす座標  $x = -x_0$  に、速度 0 で質点を置くことになる。この点でのポテンシャルエネルギーの値  $-U_0$  は、

$$U_0 = -\frac{\lambda}{2a} (e^{2ax_0} - 2e^{ax_0}) \quad (\text{R5.6})$$

を満たす。

不等式 (R5.5) より、

$$0 < e^{ax_0} < 2$$

となるが、 $e^{ax_0} > 1$  であるから、

$$1 < e^{ax_0} < 2 \quad (\text{R5.7})$$

となる。よって、

$$-1 < 1 - e^{ax_0} < 0$$

となる。これを用いると、 $x = -x_0$  における力の符号は、

$$F_x(-x_0) = -\lambda e^{ax_0} (1 - e^{ax_0}) > 0$$

と定まる。従って、 $x = -x_0$  の位置に、速度 0 で置かれた質点は、 $x$  軸の正の向きに動き始める。

[5] 速度 0 で運動を始めるので、全エネルギーの値  $E$  は  $x = -x_0$  におけるポテンシャルエネルギーに等しく、 $E = -U_0$  となる。質点が到達しうる最大の  $x$  座標においても速度は 0 であるから、この  $x$  座標は、方程式  $U(x) = -U_0$  の解である。この方程式は、

$$\frac{\lambda}{2a} (e^{-2ax} - 2e^{-ax}) = -U_0$$

となる。これを整理すると、

$$e^{-2ax} - 2e^{-ax} + \frac{2a}{\lambda} U_0 = 0$$

となる。  $y = e^{-ax}$  とおくと、これは 2 次方程式、

$$y^2 - 2y + \frac{2a}{\lambda} U_0 = 0$$

となるから、その解は、

$$y = 1 \pm \sqrt{1 - \frac{2a}{\lambda} U_0}$$

となる。元の変数  $x$  に戻す。

$$e^{-ax} = 1 \pm \sqrt{1 - \frac{2a}{\lambda} U_0}$$

$$x = -\frac{1}{a} \log \left( 1 \pm \sqrt{1 - \frac{2a}{\lambda} U_0} \right)$$

ここで、根号の中は、以下のように変形される。

$$1 - \frac{2a}{\lambda} U_0 = 1 + e^{ax_0} (e^{ax_0} - 2) = (e^{ax_0} - 1)^2$$

$e^{ax_0} - 1 > 0$  より、根号の部分は、

$$\sqrt{1 - \frac{2a}{\lambda} U_0} = e^{ax_0} - 1$$

と表される。よって、求める  $x$  座標は、

$$x = -\frac{1}{a} \log [1 \pm (e^{ax_0} - 1)]$$

となるから、複号が + 符号の場合、 $x = -x_0$ 、複号が - 符号の場合、

$$x = -\frac{1}{a} \log(2 - e^{ax_0})$$

となる。  $x = -x_0$  は始点であるから、求める  $x$  座標は、- 符号の場合の、

$$x = -\frac{1}{a} \log(2 - e^{ax_0})$$

となる。念のため、この座標の符号を確認しておく。  $0 < 2 - e^{ax_0} < 1$  より、 $\log(2 - e^{ax_0}) < 0$ 、よって、 $-\frac{1}{a} \log(2 - e^{ax_0}) > 0$  である。

[6] 図に横の矢印で示した。