

第5章 仕事とエネルギー

「力が座標の関数の場合のポテンシャルエネルギー」【課題】

出題 2025/5/15

x 軸上の負から正にかけての範囲を、質点が、力

$$F_x = -\lambda e^{-ax}(1 - e^{-ax}) \quad (\text{R5.1})$$

を受けて運動する。ここで、 λ, a は、正の定数とする。

一般に、座標 x のみの関数である力 F_x に対するポテンシャルエネルギー U は、積分、

$$U = - \int F_x dx \quad (5.7)$$

により、求めることができる。

- [1] (5.7) 式を用いて、(R5.1) 式で与えられる力に対するポテンシャルエネルギーを求めよ。なお、積分定数は、 $x \rightarrow \infty$ で $U \rightarrow 0$ となるように決めること。
- [2] ポテンシャルエネルギーの x に関する 1 回微分、2 回微分を計算せよ。それをもとに、極値点と変曲点の座標と、それらの点でのポテンシャルエネルギーの値を求めよ。更に、 $-\infty < x < \infty$ の範囲で、増減表を作成せよ。
- [3] 座標 x について、負から正にかけての範囲で、横軸に座標 x 、縦軸にポテンシャルエネルギーを取り、ポテンシャルエネルギーの曲線を作図せよ。作図では、問 [2] で作成した増減表もとに、曲線が上に凸か、下に凸かを含めて、正確に作図すること。又、 $x \rightarrow -\infty, x \rightarrow \infty$ での値も、正しく図に表すこと。
- [4] 初期に、 $x = -x_0$ の座標に、速度 0 で質点を置く。ただし、 $x_0 > 0$ とし、座標 $x = -x_0$ でのポテンシャルエネルギーの値が負となるような位置に置く。
座標 $x = -x_0$ での力 F_x の値を、 λ, a, x_0 を用いて表せ。更に、この値の符号を調べることで、 $x = -x_0$ の位置に、速度 0 で置かれた質点が、動き始める向きを求めよ。
- [5] 問 [4] で求めた向きに質点は運動を始めた後、質点が到達しうる最大の x 座標を求めよ。ただし、 $x = -x_0$ におけるポテンシャルエネルギーを $-U_0$ (ただし、 $U_0 > 0$ とする) とおき、座標は、 λ, a, U_0 を用いて求めること。次に、 U_0 を λ, a, x_0 を用いて表すことで、座標を a, x_0 を用いて求めよ。
- [6] 質点が運動する範囲を、問 [2] で求めた図に、図示せよ。図示の仕方は、テキストの例題にならうこと。