

第2章 質点力学 — 加速度が一定でない場合の運動方程式の解法

2025 年度 課題 【解答】

出題：2025/4/24

[1]

運動方程式,

$$\frac{dv}{dy}v = -g - kv^2 \quad (\text{R2.5})$$

を変数分離形に変形する.

$$\frac{v}{v^2 + \frac{g}{k}} dv = -k dy$$

この左辺を v , 右辺を y について積分する.

$$\int \frac{v}{v^2 + \frac{g}{k}} dv = -k \int dy$$

$$\frac{1}{2} \log \left(v^2 + \frac{g}{k} \right) = -ky + C'$$

$$\log \left(v^2 + \frac{g}{k} \right) = -2ky + 2C'$$

ここで C' は任意定数である. 対数の引数は正値に符号が確定しているので, 絶対値は付けなかった. 対数をはずす.

$$v^2 + \frac{g}{k} = e^{2C'} e^{-2ky}$$

任意定数を $C = e^{2C'}$ と置き換えると,

$$v^2 = C e^{-2ky} - \frac{g}{k}$$

となる. ここで初期条件として, $y = 0$ で $v = v_0$ となることを適用すると,

$$v_0^2 = C e^{-2k \cdot 0} - \frac{g}{k}$$

より,

$$C = v_0^2 + \frac{g}{k}$$

と定まる. 従って, 与えられた初期条件を満たす解は,

$$v^2 = \left(v_0^2 + \frac{g}{k} \right) e^{-2ky} - \frac{g}{k}$$

である.

【別解】

積分

$$I_1 = \int \frac{v}{v^2 + \frac{g}{k}} dv$$

を以下の置換積分法により求める.

$$v = \sqrt{\frac{g}{k}} \tan \theta \quad (0 \leq \theta < \frac{\pi}{2})$$

と変数変換をする.

$$v^2 + \frac{g}{k} = \frac{g}{k} (\tan^2 \theta + 1) = \frac{g}{k} \frac{1}{\cos^2 \theta},$$

$$dv = \sqrt{\frac{g}{k}} \frac{1}{\cos^2 \theta} d\theta,$$

であるから,

$$I_1 = \int \tan \theta d\theta$$

となる. この積分は以下のように計算される.

$$I_1 = \int \frac{\sin \theta}{\cos \theta} d\theta = - \int \frac{(\cos \theta)'}{\cos \theta} d\theta = - \log |\cos \theta|$$

これと変数分離形の右辺の積分とが等しいことより,

$$- \log |\cos \theta| = -ky + C'$$

となる. ここで C' は任意定数である. 対数はずす, 絶対値はずす.

$$\log |\cos \theta| = ky - C'$$

$$|\cos \theta| = e^{-C'} e^{ky}$$

$$\cos \theta = \pm e^{-C'} e^{ky}$$

任意定数を $D = \pm e^{-C'}$ と置き換えると,

$$\cos \theta = D e^{ky}$$

となる. この2乗を取り, 変形する.

$$\cos^2 \theta = D^2 e^{2ky}$$

$$\frac{1}{1 + \tan^2 \theta} = D^2 e^{2ky}$$

$$1 + \tan^2 \theta = D^{-2} e^{-2ky}$$

ここで, $\tan \theta = \sqrt{\frac{k}{g}}v$ を代入すると,

$$1 + \frac{k}{g}v^2 = D^{-2}e^{-2ky}$$

$$v^2 = \frac{g}{k}D^{-2}e^{-2ky} - \frac{g}{k}$$

となる. 任意定数を $C = \frac{g}{k}D^{-2}$ と置き換えると,

$$v^2 = Ce^{-2ky} - \frac{g}{k}$$

に帰着する. この後の計算は, 上と同じなので省略する.

[2]

運動方程式,

$$\frac{dv}{dy}v = -g + kv^2 \quad (\text{R2.6})$$

を変数分離形に変形する.

$$\frac{v}{v^2 - \frac{g}{k}}dv = kdy$$

この左辺を v , 右辺を y について積分する.

$$\int \frac{v}{v^2 - \frac{g}{k}}dv = k \int dy$$

$$\frac{1}{2} \log \left| v^2 - \frac{g}{k} \right| = ky + C'$$

$$\log \left| v^2 - \frac{g}{k} \right| = 2ky + 2C'$$

ここで C' は任意定数である. 対数の引数の符号は正であるとは限らないので, 絶対値が必要である. まず, 対数はずす.

$$\left| v^2 - \frac{g}{k} \right| = e^{2C'} e^{2ky}$$

次に, 絶対値はずす.

$$v^2 - \frac{g}{k} = \pm e^{2C'} e^{2ky}$$

任意定数を複号も含めて, $C = \pm e^{2C'}$ と置き換えると,

$$v^2 = Ce^{2ky} + \frac{g}{k}$$

となる. ここで初期条件として, $y = 0$ で $v = 0$ となることを適用すると,

$$C = -\frac{g}{k}$$

と定まる。従って、与えられた初期条件を満たす解は、

$$v^2 = \frac{g}{k} (1 - e^{2ky})$$

である。

【別解】

積分

$$I_2 = \int \frac{v}{v^2 - \frac{g}{k}} dv$$

を、被積分関数を部分分数に展開することで計算する。

被積分関数の分母は、

$$\frac{v}{v^2 - \frac{g}{k}} = \frac{v}{\left(v + \sqrt{\frac{g}{k}}\right) \left(v - \sqrt{\frac{g}{k}}\right)}$$

なる形に因数分解できるから、

$$\frac{v}{\left(v + \sqrt{\frac{g}{k}}\right) \left(v - \sqrt{\frac{g}{k}}\right)} = \frac{A}{v + \sqrt{\frac{g}{k}}} + \frac{B}{v - \sqrt{\frac{g}{k}}}$$

なる形に部分分数に展開することができる。 A, B はこれから値を決める定数である。右辺を通分すると、

$$\frac{v}{\left(v + \sqrt{\frac{g}{k}}\right) \left(v - \sqrt{\frac{g}{k}}\right)} = \frac{(A+B)v + \sqrt{\frac{g}{k}}(-A+B)}{\left(v + \sqrt{\frac{g}{k}}\right) \left(v - \sqrt{\frac{g}{k}}\right)}$$

となる。右辺の分子が左辺の分子と等しいためには、

$$A+B=1, \quad \sqrt{\frac{g}{k}}(-A+B)=0$$

でなければならない。これより $A=B=\frac{1}{2}$ と定まる。従って、

$$\frac{v}{\left(v + \sqrt{\frac{g}{k}}\right) \left(v - \sqrt{\frac{g}{k}}\right)} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{v + \sqrt{\frac{g}{k}}} + \frac{1}{v - \sqrt{\frac{g}{k}}} \right)$$

と展開される。積分 I_2 は以下のように計算される。

$$\begin{aligned} I_2 &= \frac{1}{2} \int \left(\frac{1}{v + \sqrt{\frac{g}{k}}} + \frac{1}{v - \sqrt{\frac{g}{k}}} \right) dv \\ &= \frac{1}{2} \left(\log \left| v + \sqrt{\frac{g}{k}} \right| + \log \left| v - \sqrt{\frac{g}{k}} \right| \right) \\ &= \frac{1}{2} \log \left| \left(v + \sqrt{\frac{g}{k}} \right) \left(v - \sqrt{\frac{g}{k}} \right) \right| \\ &= \frac{1}{2} \log \left| v^2 - \frac{g}{k} \right| \end{aligned}$$

この後の計算は上と同じである。