第 2 章 質点力学 — 加速度が一定でない場合の運動方程式の解法

2025 年度 課題

出題: 2025/4/24

運動方程式の独立変数の書き換え

座標が時間の単調な関数である場合，運動方程式の独立変数を，時間から座標に書き換えることができる．このような書き換えを行うと，常微分方程式としての運動方程式が解きやすくなる場合がある．

y 軸上の正の向きに，運動の向きを変えることなく，物体が運動しているとする．時刻 t における座標を y, 速度を v とおく．速度の定義より，

$$v = \frac{dy}{dt} \tag{R2.1}$$

である．座標 y が時間 t の単調増加関数であるとする．この場合，逆関数が存在し，t は y の関数と見なすことができる．この時，速度 v の時間微分 $\frac{dv}{dt}$ は，合成関数の微分として，

$$\frac{dv}{dt} = \frac{dv}{dy} \cdot \frac{dy}{dt} = \frac{dv}{dy} v \tag{R2.2}$$

と書き換えることができる．座標 y が時間 t の単調減少関数の場合も同様である．

問題

テキストの例題 2.5 と同じ設定とする．運動方程式（両辺を質量 m で割った形）は，

$$\frac{dv}{dt} = -g - k|v|v \tag{R2.3}$$

である．座標 y が時間 t の単調増加関数（上昇の場合）又は単調減少関数（下降の場合）と仮定する．この場合，運動方程式の独立変数を t から y に書き換えることができる．運動方程式 (R2.3) の加速度の項を (R2.2) に従って書き換えると，

$$\frac{dv}{dy} v = -g - k|v|v \tag{R2.4}$$

となる．

[1] $y = 0$ において，初速度 v_0 で，鉛直上方に質点を投げ上げる．座標が y の時の速度を，運動方程式，

$$\frac{dv}{dy} v = -g - kv^2 \tag{R2.5}$$

を解くことで求めよ．v^2 を求めればよい．

[2] $y = 0$ において，初速度 0 で，鉛直下方に質点を落下させる．座標が y の時の速度を，運動方程式，

$$\frac{dv}{dy} v = -g + kv^2 \tag{R2.6}$$

を解くことで求めよ．v^2 を求めればよい．