

[1] 位置ベクトルの表式は,

$$\mathbf{r} = a \sin \theta \mathbf{e}_r \quad (\text{R1.3})$$

である. これを時間微分すると速度 $\mathbf{v}$ となる.

$$\mathbf{v} = \dot{\mathbf{r}} = a \frac{d}{dt}(\sin \theta) \mathbf{e}_r + a \sin \theta \dot{\mathbf{e}}_r$$

ここで,

$$\frac{d}{dt}(\sin \theta) = \frac{d}{d\theta}(\sin \theta) \dot{\theta} = \dot{\theta} \cos \theta$$

である. これと (1.9a) より,

$$\mathbf{v} = a \dot{\theta} \cos \theta \mathbf{e}_r + a \dot{\theta} \sin \theta \mathbf{e}_\theta$$

となる. これに

$$\dot{\theta} = \frac{h}{a \sin \theta} \quad (\text{R1.2})'$$

を代入する.

$$\mathbf{v} = h \frac{\cos \theta}{\sin \theta} \mathbf{e}_r + h \mathbf{e}_\theta \quad (\text{R1.4})$$

これより, 速度の動径成分は $h \frac{\cos \theta}{\sin \theta}$, 角成分は h となる.

[2] 速度の表式 (R1.4) を時間微分すると加速度 $\mathbf{a}$ となる.

$$\mathbf{a} = \dot{\mathbf{v}} = h \frac{d}{dt} \left(\frac{\cos \theta}{\sin \theta} \right) \mathbf{e}_r + h \frac{\cos \theta}{\sin \theta} \dot{\mathbf{e}}_r + h \dot{\mathbf{e}}_\theta$$

ここで,

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\cos \theta}{\sin \theta} \right) = \frac{d}{d\theta} \left(\frac{\cos \theta}{\sin \theta} \right) \dot{\theta} = -\frac{1}{\sin^2 \theta} \dot{\theta}$$

である. これと (1.9a), (1.12) より,

$$\mathbf{a} = -\frac{h}{\sin^2 \theta} \dot{\theta} \mathbf{e}_r + h \frac{\cos \theta}{\sin \theta} \dot{\theta} \mathbf{e}_\theta - h \dot{\theta} \mathbf{e}_r = -\frac{h(\sin^2 \theta + 1)}{\sin^2 \theta} \dot{\theta} \mathbf{e}_r + h \frac{\cos \theta}{\sin \theta} \dot{\theta} \mathbf{e}_\theta$$

となる. これに (R1.2)' を代入すると,

$$\mathbf{a} = -\frac{h^2(\sin^2 \theta + 1)}{a \sin^3 \theta} \mathbf{e}_r + \frac{h^2 \cos \theta}{a \sin^2 \theta} \mathbf{e}_\theta$$

となる. これより, 加速度の動径成分は $-\frac{h^2(\sin^2 \theta + 1)}{a \sin^3 \theta}$, 角成分は $\frac{h^2 \cos \theta}{a \sin^2 \theta}$ となる.

軌道

極座標で表した軌道の方程式,

$$r = a \sin \theta \quad (\text{R1.1})$$

をデカルト座標で表す.

まず,

$$x = a \sin \theta \cos \theta, \quad y = a \sin^2 \theta$$

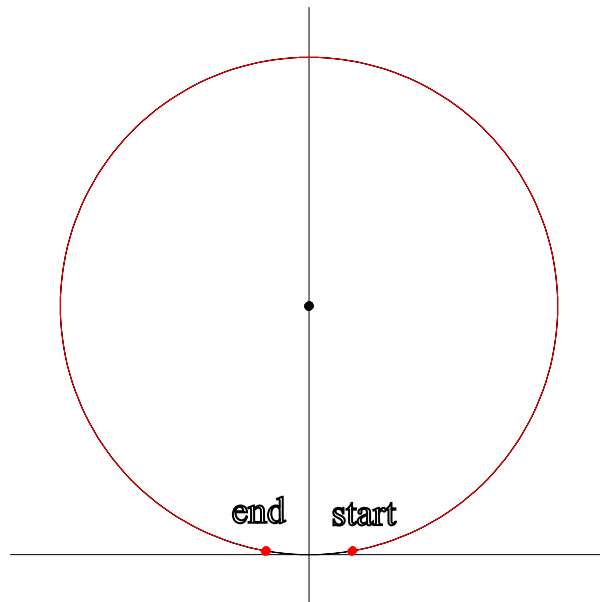
である. この2式を2乗して和を取ると,

$$x^2 + y^2 = a^2 \sin^2 \theta = ay$$

となる. これは,

$$x^2 + \left(y - \frac{a}{2}\right)^2 = \frac{a^2}{4}$$

と変形される. これは, デカルト座標 $(0, \frac{a}{2})$ に中心を持つ半径 $\frac{a}{2}$ の円である. その軌道を下図に示す



(R1.2) 式において $r > 0$ より, $\dot{\theta} > 0$ となる. これより, 軌道上を反時計回りに移動することになる. 又, r は 0 となることはできないから, θ の取りうる値の範囲は, $0 < \theta < \pi$ でなければならない. 図の第一象限の start で示される点を出発する質点は, 円周上を反時計回りに移動して, 図の第二象限の end で示される点に到達する.