第 3 章 運動量と力積 — 2 つの物体からなる系の運動
課題 解答

出題: 2025/5/8

[1] 板に外力を作用させた時，質点が，板とともに斜面を上る向き（x 軸の負の向き）に運動するのは，質点に，斜面を上る向き（x 軸の負の向き）向きに静止摩擦力が作用するからである．その大きさを F とおく．

質点には，静止摩擦力の他，斜面を下る向き（x 軸の正の向き）に重力の分力 $mg\sin\beta$ が作用する．

板には，外力 W の他，静止摩擦力の反作用が，斜面を下る向き（x 軸の正の向き）に作用する．更に，重力の分力 $Mg\sin\beta$ が斜面を下る向き（x 軸の正の向き）に作用する．

以上より，質点及び板の運動方程式は以下のようになる．

$$m\ddot{x}_1 = mg\sin\beta - F \tag{R3.1a}$$

$$M\ddot{x}_2 = Mg\sin\beta + F - W \tag{R3.1b}$$

ただし，質点は板とともに運動するので，$x_1 = x_2$, よって，$\ddot{x}_1 = \ddot{x}_2$ である．

運動方程式の両辺をそれぞれの質量で割る．

$$\ddot{x}_1 = g\sin\beta - \frac{F}{m} \tag{R3.2a}$$

$$\ddot{x}_2 = g\sin\beta + \frac{F}{M} - \frac{W}{M} \tag{R3.2b}$$

$\ddot{x}_1 = \ddot{x}_2$ より，等式,

$$g\sin\beta - \frac{F}{m} = g\sin\beta + \frac{F}{M} - \frac{W}{M}$$

が成り立つ．これを F について解くと，静止摩擦力が,

$$F = \frac{m}{M+m}W \tag{R3.3}$$

と求まる．

[2] 静止摩擦力 (R3.3) が，最大摩擦力と等しい時が，限界となる W を与える．最大摩擦力は静止摩擦係数 μ と垂直抗力の積で与えられる．垂直抗力は，質点に作用する重力 mg の斜面に垂直な成分 $mg\cos\beta$ と等しい．よって，最大摩擦力は $\mu mg\cos\beta$ となる．限界となる W は,

$$\frac{m}{M+m}W = \mu mg\cos\beta$$

より

$$W = \mu(M+m)g\cos\beta$$

となる．

[3] 質点が斜面を上る向き（x 軸の負の向き）に運動を始めるのは，質点に，斜面を上る向き（x 軸の負の向き）向きに動摩擦力が作用するからである．動摩擦力の大きさは，動摩擦係数 μ' と垂直抗力 $mg\cos\beta$ の積で，$\mu' mg\cos\beta$ となる．

質点には，静止摩擦力の他，斜面を下る向き（x 軸の正の向き）に重力の分力 $mg\sin\beta$ が作用する．

板には，外力 W の他，動摩擦力の反作用が，斜面を下る向き（x 軸の正の向き）に作用する．更に，重力の分力 $Mg\sin\beta$ が斜面を下る向き（x 軸の正の向き）に作用する．

以上より，質点及び板の運動方程式は以下のようになる．

$$m\ddot{x}_1 = mg\sin\beta - \mu' mg\cos\beta \tag{R3.4a}$$

$$M\ddot{x}_2 = Mg\sin\beta + \mu' mg\cos\beta - W \tag{R3.4b}$$

[4] 運動方程式の両辺をそれぞれの質量で割る．

$$\ddot{x}_1 = g(\sin\beta - \mu'\cos\beta) \tag{R3.5a}$$

$$\ddot{x}_2 = g\left(\sin\beta + \mu'\frac{m}{M}\cos\beta\right) - \frac{W}{M} \tag{R3.5b}$$

これらを時間について積分する．

$$\dot{x}_1 = g(\sin\beta - \mu'\cos\beta)t + C_1$$

$$\dot{x}_2 = \left[g\left(\sin\beta + \mu'\frac{m}{M}\cos\beta\right) - \frac{W}{M}\right]t + C_2$$

ここで C_1, C_2 は積分定数である．$t=0$ で $\dot{x}_1 = 0$, $\dot{x}_2 = 0$ なる初期条件を適用すると，$C_1 = C_2 = 0$ と定まる．従って，与えられた初期条件を満足する速度の解は，

$$\dot{x}_1 = g(\sin\beta - \mu'\cos\beta)t \tag{R3.6a}$$

$$\dot{x}_2 = \left[g\left(\sin\beta + \mu'\frac{m}{M}\cos\beta\right) - \frac{W}{M}\right]t \tag{R3.6b}$$

となる．

[5] (R3.4a) と (R3.4b) の和を取ると，

$$m\ddot{x}_1 + M\ddot{x}_2 = (m+M)g\sin\beta - W$$

となる．2 質点系の重心，

$$x_G = \frac{mx_1 + Mx_2}{m+M}$$

を用いると,

$$(m+M)\ddot{x}_G = (m+M)g\sin\beta - W$$

と表される.

　これを時間に関して積分し，初期条件（$t=0$ で $m\dot{x}_1 + M\dot{x}_2 = 0$, 即ち，$\dot{x}_G = 0$）を適用すると,

$$(m+M)\dot{x}_G = \left[(m+M)g\sin\beta - W\right]t \tag{R3.7}$$

となる．左辺は時刻 t における 2 質点系の運動量を表し，それが，時刻 t までの期間に，重力の分力と外力 W のなした力積（右辺）に等しい.

　一方，これとは別に，速度の解 (R3.6a), (R3.6b) より，時刻 t における 2 質点系の運動量を計算すると,

$$\begin{aligned}&(m+M)\dot{x}_G(t) = m\dot{x}_1(t) + M\dot{x}_2(t)\\ &= mg(\sin\beta - \mu'\cos\beta)t + M\left[g\left(\sin\beta + \mu'\frac{m}{M}\cos\beta\right) - \frac{W}{M}\right]t = \left[(m+M)g\sin\beta - W\right]t\end{aligned}$$

となる．これは確かに，外力 W と重力の分力のなした力積（(R3.7) 式右辺）に等しい.

[6] (R3.6a) と (R3.6b) の差を取ることで，相対速度 $\dot{\eta} = \dot{x}_1 - \dot{x}_2$ を求める.

$$\dot{\eta} = \frac{1}{M}\left[-\mu'(m+M)g\cos\beta + W\right]t$$

問 [2] の結果より， $W > \mu(m+M)g\cos\beta$ であるが，$\mu > \mu'$ より，$W > \mu'(m+M)g\cos\beta$ となる．よって $\dot{\eta} > 0$ となる．従って，動摩擦力はこれと反対の符号の負となるはずであるが，問 [3] で立てた質点の運動方程式は確かにこの符号となっている．最終的に得られた結果が，運動方程式を立てる時に仮定したことと矛盾しないので，仮定は正しかったことが確認できた.

付記

　問 [3] で，質点に作用する動摩擦力が斜面を下る向き（x 軸の正の向き）と仮定した場合，どのような結果が得られるのか，調べてみる.

　この仮定の場合，質点及び板の運動方程式は以下のようになる.

$$m\ddot{x}_1 = mg\sin\beta + \mu' mg\cos\beta \tag{R3.8a}$$

$$M\ddot{x}_2 = Mg\sin\beta - \mu' mg\cos\beta - W \tag{R3.8b}$$

運動方程式の両辺をそれぞれの質量で割る.

$$\ddot{x}_1 = g(\sin\beta + \mu'\cos\beta) \tag{R3.9a}$$

$$\ddot{x}_2 = g\left(\sin\beta - \mu'\frac{m}{M}\cos\beta\right) - \frac{W}{M} \tag{R3.9b}$$

これらを時間について積分し，初期条件を適用すると，速度の解は，

$$\dot{x}_1 = g(\sin\beta + \mu' \cos\beta)t \tag{R3.10a}$$

$$\dot{x}_2 = \left[g\left(\sin\beta - \mu' \frac{m}{M}\cos\beta\right) - \frac{W}{M}\right] t \tag{R3.10b}$$

となる．

(R3.10a) と (R3.10b) の差を取ることで，相対速度 $\dot{\eta} = \dot{x}_1 - \dot{x}_2$ を求めると，

$$\dot{\eta} = \frac{1}{M}\left[\mu'(m+M)g\cos\beta + W\right] t$$

となる．右辺の符号は正に確定しているので $\dot{\eta} > 0$ である．従って，動摩擦力はこれと反対の符号の負となるはずである．これは，動摩擦力が x 軸の正の向きとした仮定に矛盾する．従って，この仮定は誤りということになる．